O Müller

Neue Principien

des

Fluentencalculs,

enthaltend

die Grundsätze der Differential= und Variationsrechnung unabhängig von der gewöhnlichen Fluxionsmethode, von den Begriffen des unendlich Kleinen oder der verschwindenden Größen, von der Methode der Grenzen und der der Functionenlehre,

zugleich

als Lehrbuch

dieser Wissenschaft dargestellt, und mit Anwendungen auf analytische Geometrie und höhere Mechanik verbunden

von

Friedrich Wilhelm Spehr,

der Philosophie Doctor, öffentlichem Lehrer der mathematischen Wissenschaften am Herzogl. Collegium Carolinum zu Braunschweig und mehrerer gelehrten Gesellschaften Mitgliede.

Ces variations dans la manière d'établir et de présenter les principes du calcul differentiel, et même dans la dénomination de ce calcul, montrent ce me semble, qu'on n'en avoit pas saisi la véritable théorie, quoiqu'on eut trouvé d'abord les regles les plus simples et les plus commodes pour le mecanisme des opérations.

Lagrange.

Erster Theil.

Mit 5 Kupfertafeln.

Braunschweig, 1826
bei G. C. E. Meyer.

Seiner Wohlgeboren

dem

Herrn

Hofrath B. F. Thibaut

in Göttingen.

Wohlgeborner Herr,
Hochzuverehrender Herr Hofrath!

Die Mathematik ist von allen Wissenschaften die, welche sich überall der Evidenz erfreuet, oder, welche doch wenigstens zur evidenten Darstellung gebracht werden kann. Diese Ueberzeugung habe ich zunächst Ihnen zu verdanken. In Ihrem Auditorium habe ich gelernt, was eigentlich widerstreitende Größen, was eine Potenz, was überhaupt Arithmetik sey, wie man die Analysis wissenschaftlich behandeln, wie man den erhabensten Theil der Mathematik, die Differentialrechnung, auf wissenschaftlichem Wege zur Ableitung bringen müsse. Ich habe es gewagt, Ihren Ideen zu folgen; mein Lehrbuch der reinen Combinationslehre ist ein Versuch, Ihre Einleitung in die Analysis zu vervollständigen, und mehr, als es irgend ein anderer Umstand veranlassen konnte, wurde ich für meine geringe Mühe durch Ihren Beifall belohnt.

Zur Bearbeitung gegenwärtiger Schrift, das Resultat eines eignen mehrjährigen Nachdenkens, erhielt ich die erste Veranlassung gleichfalls in Ihrem Auditorium. Sie waren es, der beim Schlusse der Vorlesungen über Differentialrechnung zeigte, daß der Begriff des Differentials auch noch einer materialen Bedeutung fähig sey, daß die ursprünglichen Ideen, welche den Erfinder der Fluxionsrechnung geleitet haben, diejenigen seyen, welche man dieser Wissenschaft zum Grunde legen müsse; Sie waren es, wie ja jeder Ihrer Zuhörer weiß, der die höhere Mechanik ganz auf diesen Begriff gründete, und damit zur wissenschaftlichen Darstellung brachte. Ich verfolgte den von Ihnen angedeuteten Begriff, und gerieth so auf das Studium der Newtonschen uud Maclaurinschen Schriften. Hier überzeugte ich mich mit jedem Tage mehr, daß nur die ursprüngliche Idee Newtons zur sicheren Grundlage einer wissenschaftlichen Darstellung der Differentialrechnung dienen könne. Aber der schwache

Umriß, welchen Newton in der methodus fluxionum und in dem Tractat de quadratura curvarum giebt, so wie auch die Vorstellung des unendlich Kleinen, welche diesen Schriften unverhüllt zum Grunde liegt, ferner die weitläufigen Deductionen der Maclaurinschen Treatise of fluxions, in welcher ich doch bei den Hauptpuncten nicht die Evidenz antraf, die ich suchte, und nach welcher Maclaurin so sichtbar gestrebt, verursachten, daß ich mit den größesten Schwierigkeiten zu kämpfen hatte. Dennoch verließen mich meine Kräfte nicht, ich bauete da auf, wo mir Newtons Begriff der Fluxion, und der von Ihnen erweiterte Begriff der Fähigkeit oder des Bestrebens sich zu ändern, zum sichern Fundament angewiesen war. Wenn daher das Gebäude sinkt, so liegt die Schuld nicht an diesem Fundamente, sondern an der Construction des Gebäudes selbst. Und so darf ich es also wagen, Sie als den ersten Urheber dieser neuen Principien öffentlich zu nennen, indem jener Grund von Granit nicht das Schicksal des vielleicht schwankenden Gebäudes theilen kann.

Wie hätte ich es daher unterlassen können, Ihnen, verehrtester Lehrer, gegenwärtige Schrift zuzueignen, welche ihre erste Entstehung allein Ihnen zu danken hat? — Nehmen Sie dieselbe als einen geringen Beweis sowohl meiner tiefsten Verehrung und größesten Hochachtung, als auch meiner innigsten Dankbarkeit gegen Sie an.

Ich habe die Ehre mich ehrfurchtsvoll zu nennen

Ew. Wohlgeboren

Braunschweig,
am 2ten November 1825.

ganz gehorsamster Diener
F. W. Spehr.

Vorrede.

Schon oft ist die Meinung öffentlich ausgesprochen, die Differentialrechnung harre noch auf ihre wissenschaftliche Begründung. Daß ihre Darstellung, sowohl nach den älteren, als neueren Ansichten nicht die einer Wissenschaft ist, erhellet schon, wenn man bei Euler,*) welcher das vollständigste Lehrbuch nach der älteren Ansicht verfaßte, und bei Lacroix,**) dem man das ausführlichste nach der neueren Lagrangeschen Darstellungs-Art bearbeitete Werk verdankt, gleich anfangs bemerkt findet, es sey schwierig, diesen Calcul denen zu erklären, welche ihn nicht schon erlernt hätten. Kann die Differentialrechnung eine Wissenschaft werden, so ist es auch möglich, ihr Haupt-Object anzugeben, und darauf sie zu definiren. Es scheint mir, als wären es besonders drei Umstände, auf welche man näher Rücksicht zu nehmen hätte, wenn man beabsichtigt, alle

---

*) Vollständige Anleitung zur Differentialrechnung, a. d. Lat. übersetzt v. Michelsen, 1r. Th. *XLV*. „Es ist schwer, die Differentialrechnung und die Analysis des Unendlichen, wovon jene ein Theil ist, denen zu erklären, die darin noch gar keine Kenntniß besitzen, und man kann deswegen hier nicht füglich, so wie in anderen Wissenschaften, von der Erklärung ausgehen. Zwar irrete man, wenn man behaupten wollte, die Differentialrechnung und die Analysis des Unendlichen ließen sich gar nicht definiren; allein, da dazu mehrere Begriffe erfordert werden, die nicht bloß im gemeinen Leben, sondern selbst in der Analysis des Endlichen ungebräuchlich sind, und erst in der Differentialrechnung erworben werden müssen, so bleibt die gedachte Definition so lange unverständlich, bis man die Gründe der Differentialrechnung deutlich gefaßt hat."

**) Traité du calcul différentiel et du calc. intégr. 2me ed. Tome I. pag. 139. „Il serait fort difficile d'expliquer clairement la nature du calcul différentiel à ceux, qui n'en ont pas les premières notions. Ce n'est pas, qu'on ne puisse définir rigoureusement ce calcul; mais on ne saurait le faire sans emprunter des idées, qui ne se rencontrent point dans les circonstances ordinaires de la vie, ni dans les parties des Mathématiques qui sont l'objet des études précédentes."

Dunkelheiten und Unwissenschaftlichkeiten in der Differentialrechnung zu zerstreuen.

Erstlich hat man rein arithmetische Untersuchungen, welche freilich von allen ähnlichen zunächst auf die Differentialrechnung Bezug haben, nicht von der eigentlichen Differentialrechnung gesondert, ja diese Untersuchungen wohl gar, wie Lagrange für die Sache selbst gehalten, während man diese nur als Anwendungen jener ansah. Diese arithmetischen Untersuchungen begreifen die Regeln der Differentiation, die Ableitung des Taylorischen Lehrsatzes u. s. w., ja selbst die verschiedenen Integrationsmethoden in sich. Es ist ganz umgekehrt der Fall, jene Anwendungen sind es grade, welche den Gegenstand der eigentlichen Differentialrechnung ausmachen, und alle jene arithmetischen Entwickelungen und Operationen setzt sie aus der Analysis voraus; denn in der That wird auch dazu nichts, als gewöhnlicher Calcul angewendet, und es ist nirgends eine Veranlassung, dabei den aus der Continuität herrührenden Begriff des unendlich Kleinen zu gebrauchen. Dieses bemerkt auch Crelle, welcher zu seinem gelehrten Werke über die Rechnung mit veränderlichen Größen im Jahre 1816 noch einen nothwendigen Anhang: „über die Anwendung der Rechnung mit veränderlichen Größen &c." herausgab, und dadurch die Lagrangesche Functionenlehre eigentlich erst vervollständigte. Hier heißt es S. 3. „Es war ohne Schwierigkeit möglich, die Rechnung an sich der Algebra einzuverleiben, und dadurch elementar zu machen. Man hatte nirgends eine Veranlassung zu der dunkeln Vorstellung der Grenzen und des Unendlichen. Allein diese Veranlassung ist sogleich da, wenn man den Calcul auf Gegenstände der Geometrie und Mechanik anwendet." Eben so bemerkte auch Fischer in seinem schätzbaren Werke: „Untersuchungen über den eigentlichen Sinn der höheren Analysis," daß man sein Haupt-Augenmerk auf jene Anwendungen richten müsse. S. 138. dieser Schrift sagt er: „Es giebt eine große Menge von Aufgaben, wo man einen Differential-Ausdruck sucht, nicht durch Differentiirung einer gegebenen endlichen Function, sondern durch unmittelbare Betrachtung eines gegebenen Verhältnisses gewisser Größen oder einer geometrischen Figur. Von dieser Art sind fast alle Anwendungen der höheren Analysis auf die höhere Geometrie und Mechanik. Es scheint mir sogar, als müsse man die Methode, einen Differential-Ausdruck unmittelbar zu finden, in gewisser Rücksicht für das Eigenthümliche der höheren Analysis ansehen, indem sie auf diesem Wege Aufgaben auflösen kann, die man durch andere Mittel entweder gar nicht, oder nur mit großen Umschweifen würde auflösen können. u. s. w."

Man kann also jene arithmetischen Entwickelungs-Arten als Theil der Analysis ansehen, und muß es thun; allein die Differentialrechnung selbst hat ihre eigenen Principien, sie ist eine mathematische Wissenschaft für sich. Diese Principien darzustellen, hat Maclaurin*) versucht, allein nicht mit dem Glücke, als es für die Wissenschaft zu wünschen gewesen wäre. So entstand eine Lücke, welche jeder Anfänger fühlte, wenn auch oft ältere Mathematiker sich scheueten, es zu gestehen.

Zweitens wird doch wohl niemand, welcher irgend über die Differentialrechnung nachgedacht, oder auch nur die Natur derjenigen Gegenstände, bei welchen sich hauptsächlich die Nothwendigkeit des Gebrauchs der Differentialrechnung zeigt, näher ins Auge gefaßt hat, daran zweifeln können, daß die sich stetig ändernde Größe, oder das entstehende Continuum das Haupt-Object der Differentialrechnung sey. Aber man findet diesen Grund-Begriff in den mehrsten Lehrbüchern und andern Schriften über die Differentialrechnung kaum erwähnt, vielweniger, daß man genauere Untersuchungen darüber angestellt antrifft.

Drittens betrachtete man gewöhnlich die durch ein continuirliches Entstehen erzeugte Größe als schon entstanden. Dann ist freilich, um solche Größe zu erkennen, kein zu betrachtender Theil derselben klein genug, damit seine Größe wirklich angegeben werden könne, wenn anders das Continuum nicht gleichförmig entstand, und also ein Gegenstand der Elementarmathematik ist. Hier ist es schlechterdings unmöglich, die Begriffe des unendlich Kleinen zu vermeiden, die Erforschung solcher Größen, wenn man sie als entstanden

*) Treatise of Fluxions in two Books. Edinburgh 1742.

annimmt, führen nothwendig zu Begriffen dieser Art. Daher haben ja auch die Vertheidiger des Begriffs vom unendlich Kleinen völlig Recht, wenn sie die Nothwendigkeit dieses Begriffs in der Differentialrechnung behaupten, wenn sie andere Darstellungs-Arten dieses Theils der Mathematik, welche jenen Begriff zu umgehen suchen, sich in Weitläufigkeiten verlieren, um nur das Wort unendlich Klein nicht zu gebrauchen, indem sie sich das Ansehen geben, als bedienten sie sich jenes Begriffes gar nicht, der doch so unverkennbar ihnen zum Grunde liegt, und zum Grunde liegen muß, wenn sie diese Darstellungs-Arten verwerfen; sie haben Recht, wenn sie ihn den schönsten Begriff der Mathematik nennen, dem man unendlich viel zu danken habe, und welchen man dem Mathematiker nicht rauben müsse, wenn man ihm nicht zugleich das Erhabenste seiner Wissenschaft entziehen wolle, sie haben völlig Recht: aber sie haben nur so lange Recht, als man zugiebt, man könne, um die Natur durch continuirliches Entstehen gesetzmäßig hervorgehender Größen einzusehen, sich derjenigen Grundsätze der Größenlehre bedienen, welche nur für solche Größen entworfen sind, die man als gegeben und bestimmt, als wirklich vorhanden und seyend betrachten kann; nur so lange, als man den Unterschied nicht kennt, welchen man zwischen Größen, welche sind, und solchen, die sich im Zustande des Entstehens befinden zu machen gezwungen ist. Man entwickelt sich die Grundsätze der Größenlehre in Bezug auf Größen, welche als vorhanden und erzeugt angesehen werden können; aber man reicht damit auch nur so weit, als man Größen dieser Art zur Betrachtung ziehet: die Wissenschaft aber, welche die Größen im Zustande des Werdens betrachtet, hat ihre eigenen Grundsätze, die erst entwickelt seyn müssen, ehe man jene wissenschaftlich einer näheren Betrachtung unterwerfen kann. So konnte es also gar nicht fehlen, daß man bei Untersuchungen, wobei man Differentialrechnung anwendete, überall rückwärts ging, wo man bequemer und wissenschaftlicher den directen Weg hätte einschlagen können.

Was die Darstellung der Differentialrechnung in gegenwärtiger Schrift anbetrifft, so ist darin

Erstlich das Formale vom Materialen gesondert. Beim ersten Anblicke dürfte es vielleicht befremden, wenn man den Taylorischen Lehrsatz, die vollständig entwickelten Regeln der Differentiation, ja sogar die Integralrechnung als Einleitung behandelt findet; aber diese Sonderung war nothwendig. Jetzt kommen wir zu dem, was man sonst Anwendungen der Differentialrechnung nannte, und wobei noch niemand den Begriff des unendlich Kleinen hat umgehen können. Ich betrachte diese Untersuchungen als die Sache selbst, und jetzt folgt eine ganz neue Wissenschaft. Hier ist zweitens die continuirliche Größe, näher betrachtet, und als Grundgegenstand der Differentialrechnung angesehen. Drittens ist die Fluente nicht im Zustande des Seyens, sondern im Zustande des Werdens gedacht, das Fließen selbst ist näher zur Betrachtung gezogen, und die Grundsätze, welche auf ein solches Entstehen Beziehung haben, sind aufgestellt. Und so konnte endlich auch die Untersuchung den directen Weg gehen, und nicht, wie bisher rückwärts. Die Fluente selbst brauchen wir nicht in Theile zu zerlegen, welche, damit sie wirklich erkannt werden können, so klein, als möglich angenommen werden müssen. Um die Bedeutung des Differentialverhältnisses zu erforschen, brauchen wir nicht erst das Increment der Function mit dem der veränderlichen Größe zu vergleichen, und beide Veränderungen dann unendlich abnehmen zu lassen, also wieder rückwärts zu gehen; sondern wir betrachten die Fluente während des Fließens selbst, und beweisen, daß die Größe des Bestrebens, welches die Fluente in irgend einem Zustande besitzt, durch das Differentialverhältniß dargestellt werde. Und jetzt nimmt die Untersuchung einen Flug, der beiweitem kühner ist, der mit der vollendetsten Evidenz viel leichter und überraschender zu Resultaten führt, als die bisher bekannten Methoden der Differentialrechnung. Hier betrachtet man keine unendlich kleine Größen, hier fällt der mystische Begriff des Grenzverhältnisses weg, hier bedient man sich nicht des schwerfälligen Ganges der Lagrangeschen Methode, die Wahrheit in Grenzen einzuschließen, welche man immer enger zusammenziehet, und wobei sich dem genauen Beobachter der Begriff des unendlich Kleinen ganz unumwunden zeigt; hier hat man es überall mit wirklichen Größen zu thun, mit Begriffen, welche aus der Natur selbst genommen, und jedem verständlich sind.

Gleich zu Anfange werden diejenigen beiden Grundsätze aufgestellt, welche man bei der gewöhnlichen Darstellung der Differentialrechnung mit der größesten Vorsicht vermied, weil sie es grade sind, welche die Richtigkeit des Begriffs vom unendlich Kleinen, der nächsten Nachbarwerthe u. dgl. darthun. Diese Grundsätze wären von jeher der gewöhnlichen Differentialrechnung ein Stein des Anstoßes, weil sie selbst an ihrer Richtigkeit nicht zweifelte, und sich dieses doch nie merken lassen durfte. Hier werden diese Grundwahrheiten, welche sich aus dem menschlichen Geiste durchaus nicht verdrängen lassen, nicht allein nicht vermieden, sondern es wird im Gegentheil alles Nachfolgende darauf gebauet.

Aus dem Begriffe des Fließens folgt ganz von selbst der des Bestrebens zu fließen. Die Kraft dieses Begriffes zeigt fast jede Seite dieses Buchs, und die Haupt-Aufgabe der Differentialrechnung, das Gesetz oder die Gleichung für eine Fluente zu finden, wird dadurch zu einer Lösung gebracht, wo man nicht mehr die Evidenz vermißt, welche man an der Mathematik der Alten so sehr rühmt.

Die Einleitung, so wie auch die Beispiele durch das ganze Buch, durften deshalb nicht fehlen, weil ich mit der Bekanntmachung meiner Principien auch zugleich ein Lehrbuch verfassen wollte. Die Mechanik ist nur im Umrisse abgehandelt, obgleich man auch hier mehrere Beispiele und Anwendungen antreffen wird.

Der zweite Theil dieser Schrift wird die Functionen zum Gegenstande haben, welche von mehr als einer veränderlichen Größe abhängen. Die Einleitung enthält wieder das Formelle, also auch die Integration der Functionen mehrerer veränderlichen Größen, dann folgt die Theorie der krummen Oberflächen, die Variationsrechnung und zuletzt die Untersuchung der Mechanik, welche auf Bewegung im Raume Bezug haben, während in diesem ersten Theile nur die Bewegungen in der Ebene betrachtet sind.

Bald darauf werde ich ein vollständiges Lehrbuch der höheren Mechanik erscheinen lassen.

Spehr.

Inhalt.

Einleitung.

Einleitung.

Von den Differenzen der Functionen im Allgemeinen.

§. 1.

Die Analysis betrachtet die Function einer oder mehrerer Hauptgrößen als einen aus diesen und anderen Nebengrößen auf eine beliebige Art arithmetisch zusammengesetzten Ausdruck, bezeichnet die Hauptgrößen durch die letzten Buchstaben des Alphabets, als: s, t, v, w, x, y, z. Die Nebengrößen durch die ersteren, als: a, b, c ... m, n, und deutet eine Function der Hauptgrößen durch die Buchstaben φ, χ, ψ, F, f, an, denen jene in einer Klammer nachgesetzt werden, so, daß z. B. $\varphi(x)$, $\chi(x)$ ꝛc. Functionen der Hauptgröße x, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $F(x, y)$ ꝛc. Functionen der Hauptgrößen x und y bedeuten.

§. 2.

Wir wollen uns hier insbesondere mit der Untersuchung der Entwickelungen beschäftigen, welche mit einer Function vorgenommen werden können, wenn man für die Hauptgrößen zweitheilige Werthe substituirt, und zuerst annehmen, die Function enthalte nur eine Hauptgröße x.

Wenn man in einer Function für jede Hauptgröße einen zweitheiligen Werth an die Stelle setzt, dessen erster Theil die Hauptgröße selbst ist, und von dem Werthe, welchen die Function durch diese Substitution angenommen hat, die Function selbst wieder abziehet; so heißt der Unterschied die

Differenz der Function, und wird, wenn die Function durch y bezeichnet wurde, durch Δy angedeutet.

Hat man daher:

$$y = \varphi(x)$$

und setzt darin für x den Werth $x + h$, so ist:

$$\Delta y = \varphi(x + h) - \varphi(x)$$

oder

$$\Delta y + \varphi(x) = y + \Delta y = \varphi(x + h)$$

Die Größe h ist ebenfalls die Differenz der Hauptgröße x, denn, da $x = x$, so hat man $\Delta x = (x + h) - x = h$.

§. 3.

Es mag A eine Größe bezeichnen, welche die Hauptgröße x nicht in sich schließt, d. h. es sei A eine Nebengröße, und man habe:

$$y = A.\varphi(x)$$

so ist:

$$y + \Delta y = A.\ \varphi(x + \Delta x)$$

also:

$$\Delta y = A.\ \varphi(x + \Delta x) - y = A\varphi(x + \Delta x) - A\varphi(x)$$
$$= A.\ [\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)]$$

nun ist aber

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \Delta\varphi(x)$$

folglich hat man:

$$\Delta y = \Delta A\varphi(x) = A.\ \Delta\varphi(x)$$

d. h. die Differenz einer mit einer Nebengröße multiplicirten Function ist gleich der Differenz jener Function multiplicirt mit der Nebengröße.

§. 4.

Es sey:

$$y = \varphi(x)$$

und diese Function von x bestehn aus zwei Theilen X und Y, so, daß sowohl X als Y wieder eine Function von x ist, so hat man

$$y + \Delta y = X + \Delta X + Y + \Delta Y$$

also

$$\Delta y = \Delta X + \Delta Y$$

d. h. die Differenz der Summe zweier Functionen ist gleich der Summe der Differenzen derselben.

Eben so ist, wenn

$$y = X + Y + Z + V + W \ldots$$

ist,

$$\Delta y = \Delta X + \Delta Y + \Delta Z + \Delta V + \Delta W \ldots$$

und, wenn a, b, c... Nebengrößen bedeuten, so ist, wenn:

$$y = aX + bY + cZ \ldots$$

$$\Delta y = a\Delta X + b\Delta Y + c\Delta Z \ldots$$

§. 5.

Der Werth von $y + \Delta y$ werde durch $\overset{1}{y}$ angedeutet, so wie, wenn man in $y + \Delta y$ oder $\varphi(x + \Delta x)$ die Substitution von $x + \Delta x$ statt x abermals vornimmt, wodurch man $\varphi(x + \Delta x + \Delta x) = \varphi(x + 2\Delta x)$ erhält, dieser Ausdruck durch $\overset{2}{y}$ bezeichnet werde. Allgemein, wenn man in $\varphi(x)$ jene Substitution n mal vorgenommen hat, oder, welches einerlei ist, wenn man anstatt x, $x + n\Delta x$ in die Function substituirt hat; so werde $\varphi(x + n\Delta x)$ durch $\overset{n}{y}$ angedeutet.

Die successiven Werthe von y oder der Function von x bilden, wie aus der Analysis bekannt ist, die Glieder einer **Reihe im Allgemeinen**, welche also sind:

$$y,\ \overset{1}{y},\ \overset{2}{y},\ \overset{3}{y} \ldots \overset{n}{y} \ldots \text{ oder}$$

$$\varphi(x),\ \varphi(x + \Delta x),\ \varphi(x + 2\Delta x) \ldots \varphi(x + n\Delta x) \ldots$$

wo also jedes Glied aus dem vorhergehenden entsteht, wenn man darin für x den Werth $x + \Delta x$ setzt.

§. 6.

Ziehet man von jedem folgenden Gliede dieser Reihe das vorhergehende ab, so bilden diese successiven Differenzen die Glieder einer Reihe, welche man die **erste Differenzreihe** nennt, welche also sind:

$$\overset{1}{y} - y,\ \overset{2}{y} - \overset{1}{y},\ \overset{3}{y} - \overset{2}{y},\ \ldots \overset{n}{y} - \overset{n-1}{y},\ \ldots$$

Nun ist aber $\overset{1}{y} - y = \Delta y$, da $\overset{1}{y}$ aus y entstehet, wenn man in y statt x den Werth $x + \Delta x$ setzt. Aus gleichem Grunde ist aber auch

$$\overset{2}{y} - \overset{1}{y} = \Delta \overset{1}{y}$$

und allgemein ist:

$$\overset{n}{y} - \overset{n-1}{y} = \Delta \overset{n-1}{y},$$

denn $\overset{n}{y}$ entstand aus $\overset{n-1}{y}$, indem man darin statt x $x + \Delta x$ substituirte.

Die Glieder der ersten Differenzreihe sind daher:

$$\Delta y,\ \Delta\overset{1}{y},\ \Delta\overset{2}{y},\ \dots\ \Delta\overset{n-1}{y},\ \Delta\overset{n}{y}\ \dots$$

wenn man von jedem folgenden Gliede dieser ersten Differenzreihe das vorhergehende abziehet, so entstehen dadurch die Glieder der zweiten Differenzreihe, welche also sind:

$$\Delta\overset{1}{y} - \Delta y,\ \Delta\overset{2}{y} - \Delta\overset{1}{y},\ \dots\ \Delta\overset{n}{y} - \Delta\overset{n-1}{y}\ \dots$$

Aber es entstehet $\Delta\overset{1}{y}$ aus Δy, indem man in Δy statt x den Werth $x + \Delta x$ setzt, denn es ist $\Delta\overset{1}{y} = \overset{2}{y} - \overset{1}{y}$ und $\Delta y = \overset{1}{y} - y$, folglich ist $\Delta\overset{1}{y} - \Delta y$ die Differenz von Δy, $= \Delta\Delta y$, welches man durch $\Delta^2 y$ bezeichnet. Eben so ist $\Delta\overset{2}{y} - \Delta\overset{1}{y}$ die Differenz von $\Delta\overset{1}{y} = \Delta\Delta\overset{1}{y} = \Delta^2\overset{1}{y}$, allgemein, es ist $\Delta\overset{n}{y} - \Delta\overset{n-1}{y}$ die Differenz von $\Delta\overset{n-1}{y}$, indem $\Delta\overset{n}{y}$ aus $\Delta\overset{n-1}{y}$ dadurch entstehet, daß man in den letzten Ausdruck für x, $x + \Delta x$ setzte. Es ist daher allgemein $\Delta\overset{n}{y} - \Delta\overset{n-1}{y} = \Delta\Delta\overset{n-1}{y} = \Delta^2\overset{n-1}{y}$, und man hat die Glieder der zweiten Differenzreihe:

$$\Delta^2 y,\ \Delta^2\overset{1}{y},\ \Delta^2\overset{2}{y},\ \dots\ \Delta^2\overset{n-1}{y},\ \Delta^2\overset{n}{y}\ \dots$$

wo, wie aus der Bildung derselben erhellet, jedes Glied aus dem vorhergehenden entstehet, indem man darin statt x den Werth $x + \Delta x$ substituirt.

Auf dieselbe Art entstehen höhere Differenzreihen, die dritte ist:

$$\Delta^2\overset{1}{y} - \Delta^2 y,\ \Delta^2\overset{2}{y} - \Delta^2\overset{1}{y},\ \dots\ \Delta^2\overset{n}{y} - \Delta^2\overset{n-1}{y},\ \dots$$

wo wieder allgemein $\Delta^2\overset{n}{y} - \Delta^2\overset{n-1}{y}$ die Differenz von $\Delta^2\overset{n-1}{y}$ ist, welches man durch $\Delta^3\overset{n-1}{y}$ bezeichnet. Diese Differenzreihe ist daher:

$$\Delta^3 y,\ \Delta^3 \overset{1}{y},\ \Delta^3 \overset{2}{y},\ \ldots\ \Delta^3 \overset{n-1}{y},\ \Delta^3 \overset{n}{y},\ \ldots$$

Allgemein hat man die kte Differenzreihe:

$$\Delta^k y,\ \Delta^k \overset{1}{y},\ \Delta^k \overset{2}{y},\ \Delta^k \overset{3}{y},\ \ldots\ \Delta^k \overset{n-1}{y},\ \Delta^k \overset{n}{y},\ \ldots$$

wo allgemein.

$$\Delta^k \overset{n-1}{y} = \Delta^{k-1} \overset{n}{y} - \Delta^{k-1} \overset{n-1}{y}$$

§. 7.

Es sey z. B. $y = x^n$, so hat man die Hauptreihe:

$$x^n,\ (x + \Delta x)^n,\ (x + 2\Delta x)^n,\ \ldots\ (x + h\Delta x)^n,\ \ldots$$

Das Anfangsglied dieser Reihe ist Repräsentant aller übrigen, welche durch das successive Substituiren von $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, $x + 3\Delta x$, ... statt x aus jenen entstehen, es ist das allgemeine Glied oder der Terminus generalis der Reihe.

Eben so ist das Anfangsglied der ersten Differenzreihe der Terminus generalis derselben, weil alle folgenden Glieder daraus durch Substitution entstehen. Ebendasselbe findet mit der dritten, vierten, allgemein mit der kten Differenzreihe Statt.

Das allgemeine Glied der Hauptreihe ist also y oder die Function selbst, das der ersten Differenzreihe ist Δy, das der zweiten, $\Delta^2 y$ allgemein das der kten ist $\Delta^k y$ u. s. w.

Hat man daher

$$y = x^n,$$

so ist das allgemeine Glied der ersten Differenzreihe =

$$\Delta y = \overset{1}{y} - y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

Nun ist aber nach dem binomischen Lehrsatze:

$$(x + \Delta x)^n = x^n + {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}} x^{n-1} \Delta x + {}^n\overset{2}{\mathfrak{B}} x^{n-2} \Delta x^2 + \ldots + {}^n\overset{r}{\mathfrak{B}} x^{n-r} \Delta x^r \ldots$$

folglich

$$\Delta y = {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}} x^{n-1} \Delta x + {}^n\overset{2}{\mathfrak{B}} x^{n-2} \Delta x^2 + \ldots + {}^n\overset{r}{\mathfrak{B}} x^{n-r} \Delta x^r \ldots$$

wo die Größen ${}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}$, ${}^n\overset{2}{\mathfrak{B}}$, ... ${}^n\overset{r}{\mathfrak{B}}$, den ersten, zweiten, allgemein den rten Binomialcoefficienten der nten Potenz andeuten, und allgemein:

$$ {}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(r-1)]}{1.\ 2.\ 3\dots(r-1).r} $$

ist.

Hieraus erhellet aber, daß das allgemeine Glied der ersten Differenzreihe vom Grade $n-1$ ist, wenn das der Hauptreihe, oder die Function vom $n$ten Grade war.

Es sey allgemein der Terminus generalis der $k$ten Differenzreihe oder $\Delta^k y$ vom $p$ten Grade,

$$ = Kx^p + \overset{1}{K}x^{p-1} + \overset{2}{K}x^{p-2} \dots + \overset{r}{K}x^{p-r} + \dots $$

so hat man, da

$$ \Delta^{k+1}y = \Delta^k\overset{1}{y} - \Delta^k y \text{ ist,} $$

und $\Delta^k\overset{1}{y}$ aus $\Delta^k y$ entstehet, wenn man darin statt x den Werth $x + \Delta x$ setzt, für $\Delta^{k+1}y$ oder für das allgemeine Glied der $k+1$ten Differenzreihe den Ausdruck.

$$ [K(x+\Delta x)^p + \overset{1}{K}(x+\Delta x)^{p-1} \dots \overset{r}{K}(x+\Delta x)^{p-r} \dots] $$
$$ -(Kx^p + \overset{1}{K}x^{p-1} \dots \overset{r}{K}x^{p-r} \dots) $$

Macht man die Entwickelungen wirklich, so hat man

$$ \Delta^k\overset{1}{y} = $$

$$ \begin{array}{l} Kx^p + K\,{}^{p}\overset{1}{\mathfrak{B}}x^{p-1}\Delta x + K\,{}^{p}\overset{2}{\mathfrak{B}}x^{p-2}\Delta x^2 \dots + K\,{}^{p}\overset{h}{\mathfrak{B}}x^{p-h}\Delta x^h \dots \\ \quad + \overset{1}{K}x^{p-1} + \overset{1}{K}\,{}^{p-1}\overset{1}{\mathfrak{B}}x^{p-2}\Delta x^1 \dots + \overset{1}{K}\,{}^{p-1}\overset{h-1}{\mathfrak{B}}x^{p-h}\Delta x^{h-1} \dots \\ \qquad + \overset{2}{K}x^{p-2} + \dots + \overset{2}{K}\,{}^{p-2}\overset{h-2}{\mathfrak{B}}x^{p-h}\Delta x^{h-2} \dots \\ \qquad\quad + \overset{r}{K}x^{p-r} \dots + \overset{r}{K}\,{}^{p-r}\overset{h-r}{\mathfrak{B}}x^{p-h}\Delta x^{h-r} \dots \\ \qquad\qquad \overset{h}{K}x^{p-h}\,\Delta x^0 \dots \end{array} $$

ziehet man davon $\Delta^k y$ oder

$$ Kx^p + \overset{1}{K}x^{p-1} + \overset{2}{K}x^{p-2} \dots \overset{r}{K}x^{p-r} \dots \overset{h}{K}x^{p-h} \dots $$

ab, so bleibt $\Delta^{k+1}y$ übrig, welches geschiehet, wenn man von jeder Partialreihe von $\Delta^k\overset{1}{y}$ das erste Glied absondert, denn die Summe aller ersten Glieder ist $\Delta^k y$ selbst. Bringt man ferner alle $h$ten Glieder jener Partialreihen, d. h. alle die, welche x^{p-h} enthalten, in eine Summe, so erhält man dadurch das $h$te Glied von $\Delta^{k+1}y$, welches wir durch $\overset{h}{\mathfrak{T}}\Delta^{k+1}y$ andeuten wollen, und man hat also:

$$\overset{h}{\mathfrak{T}}\Delta^{k+1}y = [K\,{}^{p}\overset{h}{\mathfrak{B}}\,\Delta x^h + \overset{1}{K}\,{}^{p-1}\overset{h-1}{\mathfrak{B}}\,\Delta x^{h-1}\ldots + \overset{r}{K}\,{}^{p-r}\overset{h-r}{\mathfrak{B}}\,\Delta x^{h-r}\ldots + \overset{h-1}{K}\,{}^{p-(h-1)}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,\Delta x]\,x^{p-h}$$

aus welcher Formel man successiv alle Glieder von $\Delta^{k+1}y$ erhält, wenn man darin für h nach und nach 1, 2, 3 u. s. w. substituirt.

Man hat also das erste Glied:

$$= K\,{}^{p}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,\Delta x\,.\,x^{p-1}$$

das zweite:

$$= (K\,{}^{p}\overset{2}{\mathfrak{B}}\,\Delta x^2 + \overset{1}{K}\,{}^{p-1}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,\Delta x)\,x^{p-2}$$

u. s. f.

Die $k+1$te Differenz von y wird also durch eine Reihe vor der Form

$$\overset{1}{A}x^{p-1} + \overset{2}{A}x^{p-2}\ldots + \overset{h}{A}x^{p-h}\ldots$$

dargestellt, woraus erhellet, daß, wenn der Terminus generalis der $k$ten Differenzreihe vom $p$ten Grade war, der der $k+1$ten vom Grade $p-1$ seyn werde; ferner, wenn das höchste Glied des Terminus generalis der $k$ten Differenzreihe Kx^p war, daß das höchste Glied des Terminus generalis der $k+1$ten Differenzreihe $K\,{}^{p}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,x^{p-1}\Delta x$ seyn müsse.

Ist daher die ursprüngliche Function, oder der Terminus generalis der Hauptreihe vom $n$ten Grade $= x^n$, oder allgemeiner $= ax^n$, so ist der der ersten Differenzreihe vom $n-1$ten Grade, und das höchste Glied desselben ist $= {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,ax^{n-1}\Delta x$. Ferner findet man den Terminus generalis der zweiten Differenzreihe vom $n-2$ten Grade, und das höchste Glied desselben ist $= {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,{}^{n-1}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,.\,ax^{n-2}\Delta x^2$ u. s. w. allgemein, der Terminus generalis der $k$ten Differenzreihe ist vom $n-k$ten Grade, und das höchste Glied desselben ist $= {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,{}^{n-1}\overset{1}{\mathfrak{B}}\ldots{}^{n-(k-1)}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,ax^{n-k}\Delta x^k$

Ist daher n eine ganze positive Zahl, so wird der Terminus generalis der $n$ten Differenzreihe vom Grade 0 seyn, also keine Hauptgröße x mehr in sich schließen, und das einzige Glied desselben ist dann $= {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,{}^{n-1}\overset{1}{\mathfrak{B}}\ldots{}^{1}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,a\,\Delta x^n$ $= \overset{n}{p}\,a\,\Delta x^n$, wenn $\overset{n}{p}$ die Permutationszahl des nten Grades $= 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n$ anzeigt.

Nimmt man endlich den Coefficienten a so wie auch $\Delta x = 1$ an, d. h. läßt man $\overset{1}{y}$, $\overset{2}{y}\ldots$ aus y dadurch entstehen, daß man successiv $x + 1$, $x + 2$, $x + 3\ldots$ statt x in y oder x^n setzt, so ist der Terminus generalis der nten Differenzreihe $= \overset{n}{p}$, woraus folgt, daß jedes Glied dieser nten Differenzreihe denselben Werth, nämlich $\overset{n}{p}$ erhält. Der Terminus generalis der $n + 1$ten Differenzreihe ist alsdann $= 0$, indem dieser den Factor ${}^{0}\overset{1}{\mathfrak{B}}$ erhält, welcher nach der Lehre von den Facultäten $= 0$ ist. Es giebt daher, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet keine $n + 1$te Differenzreihe, und überhaupt auch keine höhere.

In diesem Falle ist daher $\Delta^m x^n$ so lange $= 0$, so lange $m > n$ angenommen wird, der Ausdruck ist $= \overset{n}{p}\,\Delta x$, wenn $m = n$ ist.

§. 8.

Es ist übrigens klar, daß man, um aus einer Function die Hauptreihe wirklich zu bilden, nicht allein für Δx sondern auch für x einen bestimmten Werth annehmen müsse. In der Theorie der Reihen pflegt man gewöhnlich für Δx den Werth 1 zu substituiren, und $x = 0$ zu setzen, durch welche Annahme z. B. obige Reihe, deren Terminus generalis x^n war, die Form

$$0,\ 1,\ 2^n,\ 3^n,\ 4^n\ldots$$

annimmt. Ist z. B. $n = 3$, also die Reihe:

$$0,\ 1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ 216\ldots$$

so wird man hier drei Differenzreihen haben, die Glieder der letzten sind alle dieselben und zwar $= 1 \,.\, 2 \,.\, 3 = 6$. In der That findet man

die erste Differenzr.	1, 7, 19, 37. 61, 91, ..
die zweite:	6, 12, 18, 24, 30, ..
die dritte:	6 6 6 6 ...

§. 9.

Die Formel:

$$\Delta^k \overset{n}{y} = \Delta^{k-1} \overset{n+1}{y} - \Delta^{k-1} \overset{n}{y}$$

zeigt die Art und Weise an, wie man jeden Ausdruck, wie $\Delta^k \overset{n}{y}$ in zwei Theile zerlegen, oder discerpiren könne. Wendet man die Regel der Discerption, welche sie angiebt, auf beide Theile von $\Delta^k \overset{n}{y}$ selbst an, so erhält man:

$$\Delta^{k-1} \overset{n+1}{y} = \Delta^{k-2} \overset{n+2}{y} - \Delta^{k-2} \overset{n+1}{y}$$

und

$$\Delta^{k-1} \overset{n}{y} = \Delta^{k-2} \overset{n+1}{y} - \Delta^{k-2} \overset{n}{y}$$

also ist:

$$\Delta^k \overset{n}{y} = \Delta^{k-2} \overset{n+2}{y} - 2\,\Delta^{k-2} \overset{n+1}{y} + \Delta^{k-2} \overset{n}{y}$$

Ferner ist:

$$\Delta^{k-2} \overset{n+2}{y} = \Delta^{k-3} \overset{n+3}{y} - \Delta^{k-3} \overset{n+2}{y}$$

$$-2\,\Delta^{k-2} \overset{n+1}{y} = -2\,\Delta^{k-3} \overset{n+2}{y} + 2\,\Delta^{k-3} \overset{n+1}{y}$$

$$\Delta^{k-2} \overset{n}{y} = \Delta^{k-3} \overset{n+1}{y} - \Delta^{k-3} \overset{n}{y}$$

folglich hat man

$$\Delta^k \overset{n}{y} = \Delta^{k-3} \overset{n+3}{y} - 3\,\Delta^{k-3} \overset{n+2}{y} + 3\,\Delta^{k-3} \overset{n+1}{y} - \Delta^{k-3} \overset{n}{y}$$

so kann man fortfahren jeden einzelnen Theil ferner zu zerlegen und man hat durch die vierte Discerption jedes Theils

$$\Delta^k \overset{n}{y} = \Delta^{k-4} \overset{n+4}{y} - 4\,\Delta^{k-4} \overset{n+3}{y} + 6\,\Delta^{k-4} \overset{n+2}{y} - 4\,\Delta^{k-4} \overset{n+1}{y} + \Delta^{k-4} \overset{n}{y}$$

Bei jeder neuen Zerlegung entstehen aus jedem Gliede zwei neue, und beide sind Differenzen eines um eins niedrigeren Grades, als die, woraus sie entstanden, wie die allgemeine Formel

$$\Delta^k \overset{n}{y} = \Delta^{k-1} \overset{n+1}{y} - \Delta^{k-1} \overset{n}{y}$$

zeigt. Es werden daher in der Reihe von $\Delta^k \overset{n}{y}$, durch welche

Discerption sie auch entstanden seyn mag, alle Glieder Differenzen eines gleichhohen Grades seyn, und zwar nach der ersten Discerption vom Grade $k-1$, nach der zweiten vom Grade $k-2$, allgemein nach der $r$ten vom Grade $k-r$. Es entstehet ferner bei der ersten Discerption von $\Delta^k\overset{n}{y}$ ein Glied mit $\overset{n+1}{y}$ und ein Glied mit $\overset{n}{y}$, bei der zweiten entstehet wieder aus dem Gliede mit $\overset{n+1}{y}$ ein Glied mit $\overset{n+2}{y}$, ein anderes mit $\overset{n+1}{y}$, aus dem zweiten Gliede, welches $\overset{n}{y}$ enthält, entstehet ein Glied mit $\overset{n+1}{y}$, und ein solches mit $\overset{n}{y}$, folglich enthält $\Delta^k\overset{n}{y}$ in der Reihe, welche durch die zweite Discerption entstehet, ein Glied, welches $\overset{n+2}{y}$, ein anderes, welches $\overset{n+1}{y}$, ein drittes endlich, welches $\overset{n}{y}$ enthält. So gehet es bei jeder folgenden Discerption, es entstehet zuletzt immer wieder ein Glied mit $\overset{n}{y}$, während allgemein bei der $r$ten Discerption das höchste Glied $\overset{n+r}{y}$ enthält. Ob nun aber bei jeder folgenden Zertheilung die Reihe so regelmäßig bleibt, daß darin Glieder vorkommen, welche successiv $\overset{n+r}{y}, \overset{n+r-1}{y}, \overset{n+r-2}{y} \ldots \overset{n}{y}$ vollständig enthalten, darüber wollen wir nichts vorherbestimmen. Was ferner die Coefficienten betrifft, so ist das Gesetz ihrer Bildung gleichfalls noch unbekannt, wir sind aber durch das Vorhergehende berechtigt, anzunehmen, $\Delta^k\overset{n}{y}$ sey durch die $r$te Discerption zu:

$${}^{r}\overset{0}{A}\,\Delta^{k-r}\overset{n+r}{y} + {}^{r}\overset{1}{A}\,\Delta^{k-r}\overset{n+r-1}{y} \ldots + {}^{r}\overset{h}{A}\,\Delta^{k-r}\overset{n+r-h}{y} \ldots + {}^{r}\overset{r}{A}\,\Delta^{k-r}\overset{n}{y}.$$

geworden, wo die Coefficienten ganz unbestimmt sind und auch einzeln $= 0$ werden können.

Eben so wird man durch die $r+1$te Discerption die Reihe:

$${}^{r+1}\overset{0}{A}\,\Delta^{k-(r+1)}\overset{n+r+1}{y} + \ldots + {}^{r+1}\overset{h}{A}\,\Delta^{k-(r+1)}\overset{n+r+1-h}{y} \ldots + \overset{r+1}{A}\,\Delta^{k-(r+1)}\overset{n}{y}$$

erhalten, wenn man sich einer analogen Bezeichnung bedient. Diese Reihe entstehet nun aus der vorhergehenden, wenn man in letzterer jedes Glied der anfänglichen Discerption unterwarf.

Betrachtet man das hte Glied der letzten Reihe, welches also $\overset{n+r+1-h}{y} = \overset{n+r-(h-1)}{y}$ enthält, so ist klar, daß dieses aus dem h-1ten und hten Gliede der vorletzten Reihe entstanden seyn muß, denn nur diese beiden Glieder, welche sind:

$${}^{r}\overset{h-1}{A}\,\Delta^{k-r}\,\overset{n+r-(h-1)}{y} \quad \text{und} \quad {}^{r}\overset{h}{A}\,\Delta^{k-r}\,\overset{n+r-h}{y}$$

können, wenn sie discerpirt werden, einen Ausdruck hervorbringen, welcher $\overset{k+r+1-h}{y}$ oder $\overset{k+r-(h-1)}{y}$ enthält. Nun ist aber:

$${}^{r}\overset{h-1}{A}\,\Delta^{k-r}\,\overset{n+r-(h-1)}{y} = {}^{r}\overset{h-1}{A}.\left(\Delta^{k-(r+1)}\,\overset{n+r-(h-2)}{y} - \Delta^{k-(r+1)}\,\overset{n+r-(h-1)}{y}\right)$$

$${}^{r}\overset{h}{A}\,\Delta^{k-r}\,\overset{n+r-h)}{y} = {}^{r}\overset{h}{A}.\left(\Delta^{k-(r+1)}\,\overset{n+r-(h-1)}{y} - \Delta^{k-(r+1)}\,\overset{n+r-h}{y}\right)$$

daher hat man

$${}^{r+1}\overset{h}{A}\,\Delta^{k-(r+1)}\,\overset{n+r-(h-1)}{y} = -{}^{r}\overset{h-1}{A}\,\Delta^{k-(r+1)}\,\overset{n+r-(h-1)}{y} + {}^{r}\overset{h}{A}\,\Delta^{k-(r+1)}\,\overset{n+r-(h-1)}{y}$$

also ist

$${}^{r+1}\overset{h}{A} = {}^{r}\overset{h}{A} - {}^{r}\overset{h-1}{A}$$

welche Formel allgemein das recurrirende Gesetz der zu suchenden Coefficienten darstellt.

Um nun daraus das independente Gesetz ihrer Bildung abzuleiten, bemerke man, daß unter den Binomialcoefficienten folgende Recursionsformel Statt finde.

$${}^{r+1}\overset{h}{\mathfrak{B}} = {}^{r}\overset{h}{\mathfrak{B}} + {}^{r}\overset{h-1}{\mathfrak{B}}$$

welche mit der oben für ${}^{r+1}\overset{h}{A}$ gefundenen, identisch seyn würde, wenn nicht in derselben der zweite Theil negativ wäre. Multiplicirt man jedoch jeden Theil derselben mit $(-1)^h$, so hat man:

$$(-1)^h\,{}^{r+1}\overset{h}{A} = (-1)^h\,{}^{r}\overset{h}{A} - (-1)^h\,{}^{r}\overset{h-1}{A}.$$

d. h.

$$(-1)^h\,{}^{r+1}\overset{h}{A} = (-1)^h\,{}^{r}\overset{h}{A} + (-1)^{h-1}\,{}^{r}\overset{h-1}{A}$$

welche Recursion vollkommen mit der für ${}^{r+1}\overset{h}{\mathfrak{B}}$ übereinstimmt.

Man hat daher in größester Allgemeinheit

$$(-1)^h\,{}^{r+1}\overset{h}{A} = {}^{r+1+s}\overset{h+k}{\mathfrak{B}}$$

wo g und k zwei Constanten bedeuten, deren nähere Bestimmung noch übrig ist.

Für $h = 0$ erhält man den ersten Coefficienten der Reihe, welcher jedesmal $= 1$ seyn muß, da allgemein aus der Discerption aller Glieder der Reihe für $\Delta^k \overset{n}{y}$, welche aus der rten Discerption entstand, nur eins hervorgehen kann, welches $\overset{n+r+1}{y}$ enthält. Es ist daher:

$$ {}^{r+1+g}\overset{k}{\mathfrak{B}} = 1, $$

woraus folgt, daß $k = 0$ ist.

Zur Bestimmung von g setze man $r = 0$, so stellt die Reihe von $\Delta^k \overset{n}{y}$ die vor, welche nach der ersten Zertheilung entstand, nämlich $\Delta^{k-1} \overset{n+1}{y} - \Delta^{k-1} \overset{n}{y}$, wo die Coefficienten der Einheit gleich sind. Man hat daher:

$$ {}^{1+g}\overset{n}{\mathfrak{B}} = 1, \text{ folgl. } g = 0 \text{ *)} $$

also allgemein:

$$ {}^{r+1}\overset{n}{A} = (-1)^h \; {}^{r+1}\overset{h}{\mathfrak{B}} $$

oder für $r + 1$ den Werth r gesetzt:

$$ {}^{r}\overset{n}{A} = (-1)^h \; {}^{r}\overset{h}{\mathfrak{B}} $$

Man hat daher nach der rten Discerption:

$$ \Delta^k \overset{n}{y} = \Delta^{k-r} \overset{n+r}{y} - {}^{r}\overset{1}{\mathfrak{B}} \, \Delta^{k-r} \overset{n+r-1}{y} + \ldots + (-1)^h \; {}^{r}\overset{h}{\mathfrak{B}} \, \Delta^{k-r} \overset{n+r-h}{y} \ldots $$
$$ (-1)^r \, \Delta^{k-r} \overset{n}{y} $$

oder:

$$ \Delta^k \overset{n}{y} = \Delta^{k-r} \overset{n+r}{y} - r \, \Delta^{k-r} \overset{n+r-1}{y} + \ldots (-1)^h \frac{r(r-1)\ldots(r-(h-1))}{1 \cdot 2 \ldots h} \Delta^{k-r} \overset{n+r-h}{y} \ldots $$
$$ (-1)^r \, \Delta^{k-r} \overset{n}{y} $$

Treibt man die Discerption bis zur kten, so entstehet

*) Man sehe wegen dieses Schlusses meinen Tractat: de utrisque analyseos recentioris determinandi rationibus etc. Brunsv. (pag. 10 sqq.) und meinen Lehrbegriff der reinen Combinationslehre. Daselbst. (§. 48.)

der Ausdruck für $\Delta^k \overset{n}{y}$, wenn man in obigen Ausdruck für r den Werth k substituirt, wodurch das hte Glied zu

$$(-1)^h\, {}^k\overset{h}{\mathfrak{B}}\, \Delta^0 \overset{n+k-h}{y} = (-1)^h\, {}^k\overset{h}{\mathfrak{B}}\, \overset{n+k-h}{y}$$

wird. Man hat dann also:

$$\Delta^k \overset{n}{y} = \overset{n+k}{y} - {}^k\overset{1}{\mathfrak{B}}\, \overset{n+k-1}{y} + {}^k\overset{2}{\mathfrak{B}}\, \overset{n+k-2}{y} \dots (-1)^h\, {}^k\overset{h}{\mathfrak{B}}\, \overset{n+k-h}{y} \dots (-1)^k \overset{n}{y}$$

Setzt man in diese Formel für n den Werth 0, wodurch $\overset{n}{y}$ zu y, d. h. zur ursprünglichen Function von x wird, in welcher keine Substitution von $x + \Delta x$ statt x vorgenommen ist, so hat man:

$$\Delta^k y = \overset{k}{y} - {}^k\overset{1}{\mathfrak{B}}\, \overset{k-1}{y} + {}^k\overset{2}{\mathfrak{B}}\, \overset{k-2}{y} - \dots (-1)^h\, {}^k\overset{h}{\mathfrak{B}}\, \overset{k-h}{y} \dots (-1)^k y.$$

Ableitung des Taylorischen Theorems.

§. 10.

Es sey

$$y = \varphi\,(x),$$

es werde für x der Werth $x + \Delta x$ substituirt und der Werth von Δy verlangt, so, daß die Reihe nach Potenzen von Δx fortschreitet.

In der Analysis wird gezeigt, daß man eine Function von x, wenn man darin für x einen zweitheiligen Werth $x + h$ setzt, in eine nach den successiven Potenzen von h fortschreitende Reihe entwickeln könne, so, daß wir hier berechtigt sind, zu setzen:

$$\varphi\,(x + h) = \overset{0}{A} + \overset{1}{A}h^1 + \overset{2}{A}h^2 \dots + \overset{r}{A}h^r \dots$$

Man hat also allgemein:

$$\overset{k-h}{y} = \varphi(x + (k-h)\,\Delta x) = A + \overset{1}{A}(k-h)\,\Delta x \dots + \overset{r}{A}(k-h)^r\,\Delta x^r \dots$$

wo die Coefficienten noch unbekannt sind, und als Functionen von x, welche kein Δx mehr enthalten, angesehen werden müssen.

Vermöge dieser Bemerkung und der Beziehung:

$$\Delta^k y = \overset{k}{y} - {}^k\overset{1}{\mathfrak{B}}\, \overset{k-1}{y} + {}^k\overset{2}{\mathfrak{B}}\, \overset{k-2}{y} \dots + (-1)^h\, {}^k\overset{h}{\mathfrak{B}}\, \overset{k-h}{y} \,.. (-1)^k y$$

kann man also für $\Delta^k y$ eine nach Potenzen von Δx successiv fortschreitende Reihe erhalten, denn man hat:

$$\overset{k}{y} = A + \overset{1}{A}k\,\Delta x + \overset{2}{A}k^2\,\Delta x^2 \ldots + \overset{r}{A}k^r\,\Delta x^r \ldots$$

$$-{}^k\overset{1}{\mathfrak{B}}\,\overset{k-1}{y} = -{}^k\overset{1}{\mathfrak{B}}\,A - {}^k\overset{1}{\mathfrak{B}}\,\overset{1}{A}(k-1)\,\Delta x - {}^k\overset{1}{\mathfrak{B}}\,\overset{2}{A}(k-1)^2\,\Delta x^2 \ldots$$
$$- {}^k\overset{1}{\mathfrak{B}}\,\overset{r}{A}(k-1)^r\,\Delta x^r \ldots$$

$$(-)^h\,{}^k\overset{h}{\mathfrak{B}}\,\overset{k-h}{y} = (-1)^h\,{}^k\overset{h}{\mathfrak{B}}\,A + (-1)^h\,{}^k\overset{h}{\mathfrak{B}}\,\overset{1}{A}\,(k-h)\,\Delta x \ldots$$
$$+ (-1)^h\,{}^k\overset{h}{\mathfrak{B}}\,\overset{r}{A}(k-h)^r\,\Delta x^r \ldots$$

$$(-1)^{k-1}\,{}^k\overset{k-1}{\mathfrak{B}}\,\overset{1}{y} = (-1)^{k-1}\,{}^k\overset{k-1}{\mathfrak{B}}\,A + (-1)^{k-1}\,{}^k\overset{k-1}{\mathfrak{B}}\,\overset{1}{A}\,\Delta x \ldots$$
$$+ (-1)^{k-1}\,{}^k\overset{k-1}{\mathfrak{B}}\,\overset{r}{A}\,\Delta x^r \ldots$$

$$(-1)^k y = (-1)^k y$$

Das Aggregat dieser Reihen ist $= \Delta^k y$. Ziehet man die rten Glieder derselben in eine Summe zusammen, so erhält man das rte Glied von $\Delta^k y$, welches wir durch $\overset{r}{\mathfrak{T}}\,\Delta^k y$ bezeichnen werden. Es ist daher:

$$\overset{r}{\mathfrak{T}}\,\Delta^k y = [k^r - {}^k\overset{1}{\mathfrak{B}}(k-1)^r + {}^k\overset{2}{\mathfrak{B}}(k-2)^r \ldots + (-1)^h\,{}^k\overset{h}{\mathfrak{B}}(k-h)^r \ldots$$
$$(-1)^{k-1}\,{}^k\overset{k-1}{\mathfrak{B}}.]\,\overset{r}{A}.\,\Delta x^r$$

wozu man auch noch ein Glied $(-1)^k\,{}^k\overset{k}{\mathfrak{B}}\,(k-k)^r$ addiren kann, um der Reihe eine vollständigere Gestalt zu geben, indem dieses, als $= 0$ keine Veränderung hervorbringt.

Also hat man:

$$\overset{r}{\mathfrak{T}}\,\Delta^k y = [k^r - {}^k\overset{1}{\mathfrak{B}}(k-1)^r + {}^k\overset{2}{\mathfrak{B}}(k-2)^r \ldots + (-1)^h\,{}^h\overset{h}{\mathfrak{B}}(k-h)^r \ldots$$
$$(-1)^k\,(k-k)^r\,]\,\overset{r}{A}\,\Delta x^r$$

Der Ausdruck ist nach einer bedeutenden Zusammenziehung fähig, welche sogleich gemacht werden kann, wenn man bedenkt, daß die Größen k^r, $(k-1)^r$, $\ldots(k-h)^r$ .. die Glieder einer Reihe sind, wobei die Differenz der Hauptgröße $= 1$ angenommen würde, daß der Terminus generalis derselben eine Function vom rten Grade sey, deren Exponent, r, eine ganze positive Zahl ist, und daß man denselben durch $z = v^r$ bezeichnen könne.

Demnach entstehet die Reihe:

$$z,\ \overset{1}{z},\ \overset{2}{z} \ldots \overset{h}{z} \ldots \overset{k}{z} \ldots$$

dadurch, daß man successiv in z oder v^r für v die Werthe $v+1, v+2, \ldots v+h, \ldots v+k$ setzte und darauf $v=0$ annahm, so, daß also

$$\overset{h}{Z} = h^r, \quad \overset{k}{Z} = k^r \text{ ist}$$

und folglich kann man den Coefficienten von $\overset{r}{A} \Delta x^r$ durch

$$\overset{k}{Z} - {}^k\mathfrak{B}\overset{1\ k-1}{Z} + {}^k\mathfrak{B}\overset{2\ k-2}{Z} \ldots (-1)^h\, {}^k\mathfrak{B}\overset{h\ k-h}{Z} \ldots (-1)^k Z$$

ausdrücken. Nun ist aber dieser Ausdruck der kten Differenz von z gleich, denn wir fanden oben die Beziehung:

$$\Delta^k y = \overset{k}{y} - {}^k\mathfrak{B}\overset{1\ k-1}{y} + {}^k\mathfrak{B}\overset{2\ k-2}{y} \ldots (-1)^h\, {}^k\mathfrak{B}\overset{h\ k-h}{y} \ldots (-1)^k y.$$

Daher ist der Coefficient zu $\overset{r}{A} \Delta x^r$, $= \Delta^k Z$ und man hat also:

$$\overset{r}{\mathfrak{T}} \Delta^k y = \Delta^k Z . \overset{r}{A} \Delta x^r$$

Nun ist aber z eine Function des rten Grades, $= v^r$, wo r eine ganze positive Zahl ist, und die Hauptreihe entstand dadurch, daß man für Δv den Werth 1 substituirte. Wir haben aber oben gesehen, daß $\Delta^k z$ so lange $= 0$ ist, so lange k größer als r, oder r kleiner ist als k, daß ferner $\Delta^k z$ in dem Falle, wo $k = r$ wird, $= \overset{k}{p} = \overset{r}{p} = 1 . 2 \ldots r$ sey.

Es ist daher das rte Glied von $\Delta^k y$ oder $\overset{r}{\mathfrak{T}} \Delta^k y$ so lange $= 0$, so lange r kleiner als k ist, und das erste reelle Glied von $\Delta^k y$ wird das kte seyn, so, daß sich die nach Potenzen von Δx fortschreitende Reihe für $\Delta^k y$ mit einem Gliede anfängt, welches Δx^k enthält, und successiv durch höhere Potenzen von Δx fortschreitet.

Dieses erste Glied von $\Delta^k y$, welches wir jetzt durch $\overset{1}{\mathfrak{T}} \Delta^k y$ bezeichnen wollen, ist also $= \Delta^k Z \overset{k}{A} \Delta x^k$, und da in diesem Falle $\Delta^k Z = \overset{k}{p} = 1 . 2 \ldots k$ wird, so hat man:

$$\overset{1}{\mathfrak{T}} \Delta^k y = \overset{k}{p} \overset{k}{A} \Delta x^k$$

Was die nachfolgenden Glieder betrifft, so konnte man sie darstellen, allein man bedarf ihrer zu diesem

Zwecke nicht. Durch Umkehrung dieser Gleichung hat man:

$$\overset{k}{A} = \frac{\overset{1}{\mathfrak{T}}\Delta^{k} y}{1.2..k\Delta x^{k}}$$

Diese Beziehung ist eine der wichtigsten in der gesammten Analysis, denn $\overset{k}{A}$ ist, wie angenommen wurde, allgemein der kte Coefficient der Reihe, worin sich jede Function von x entwickelt, wenn man für x einen zweitheiligen Werth $x+\Delta x$ setzt, d. h. der Coefficient, welcher in Δx^{k} multiplicirt ist. Hieraus ersiehet man nun, da $\overset{k}{A}$ die Differenz Δx^{k} im Divisor enthält, daß das gesammte kte Glied von $\varphi(x+\Delta x), = \frac{\overset{1}{\mathfrak{T}}\Delta^{k} y}{1.2..k}$ seyn werde, und daß man also habe:

$$\overset{1}{y}=\varphi(x+\Delta x)=y+\overset{1}{\mathfrak{T}}\Delta y+\frac{\overset{1}{\mathfrak{T}}\Delta^{2} y}{1.2..}+\frac{\overset{1}{\mathfrak{T}}\Delta^{3} y}{1.2.3}\ldots+\frac{\overset{1}{\mathfrak{T}}\Delta^{k} y}{1.2..k}\ldots$$

also

$$\overset{1}{y}-y=\Delta y=\overset{1}{\mathfrak{T}}\Delta y+\frac{\overset{1}{\mathfrak{T}}\Delta^{2} y}{1.2}+\frac{\overset{1}{\mathfrak{T}}\Delta^{3} y}{1.2.3}\ldots+\frac{\overset{1}{\mathfrak{T}}\Delta^{k} y}{1.2..k}\ldots$$

Hieraus ersiehet man, daß die ersten Glieder der successiven Differenzen von y, nämlich $\overset{1}{\mathfrak{T}}\Delta^{1} y$, $\overset{1}{\mathfrak{T}}\Delta^{2} y$ u. s. w. Ausdrücke von Wichtigkeit sind. Der Sprachgebrauch hat für sie eigne Namen und Bezeichnungen eingeführt, und man nennt das erste Glied der Reihe für Δy oder $\overset{1}{\mathfrak{T}}\Delta y$, das **erste Differential** oder schlechthin das **Differential** von y, und bezeichnet es durch dy.

Eben so nennt man $\overset{1}{\mathfrak{T}}\Delta^{2} y$ das zweite Differential von y, und bezeichnet es durch $d^{2} y$; allgemein, es heißt das erste Glied von $\Delta^{k} y$ oder $\overset{1}{\mathfrak{T}}\Delta^{k} y$ das kte Differential von y, und wird durch $d^{k} y$ bezeichnet, so, daß also vermöge dieser Bezeichnung Δy in folgender Form dargestellt wird:

$$\Delta y = dy + \frac{d^2y}{1.2} + \frac{d^3y}{1.2.3} \dots + \frac{d^ky}{1.2\dots k} \dots$$

„Diese Reihe schreitet nach Potenzen von Δx fort, und dy enthält Δx, d^2y enthält Δx^2, allgemein d^ky enthält Δx^k. Man nennt diese Beziehung, welche eine der wichtigsten und fruchtbarsten der Analysis ist, die Taylorische Reihe oder den Taylorischen Lehrsatz, und die Coefficienten dieser Reihe, oder die Größen, welche in Δx, Δx^2 u. s. w. multiplicirt sind, außer den Permutationszahlen, also die Größen $\frac{dy}{\Delta x}$, $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ u. s. w. die successiven Differentialverhältnisse.

§. 11.

Um also die Reihe von Δy darzustellen, kann man jedes Glied für sich independent berechnen, welches keinen Schwierigkeiten unterworfen seyn kann, indem immer nur ein erstes Glied einer Reihe darzustellen ist.

Z. B. man habe:

$$y = x^n + bx^r - cx^2;$$

so ist

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n + b(x + \Delta x)^r - c(x + \Delta x)^2 - (x^n + bx^r - cx^2)$$

Nun ist nach dem binomischen Lehrsatze:

$$(x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\,\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}\,\Delta x^2 \dots$$

$$(x + \Delta x)^r = x^r + rx^{r-1}\,\Delta x + \frac{r(r-1)}{1.2}x^{r-2}\,\Delta x^2 \dots$$

$$(x + \Delta x)^2 + x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2$$

folglich hat man:

$$\Delta y = \left.\begin{matrix} nx^{n-1} \\ + brx^{r-1} \\ + 2cx \end{matrix}\right\} \Delta x + \left.\begin{matrix} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,x^{r-2} \\ + \frac{br(r-1)}{1.2}\,x^{r-2} \\ + c \end{matrix}\right\} \Delta x^2 + \dots$$

Man hat jedoch dieses weitläufige Verfahren der Substitution nicht nöthig, es giebt unter den Gliedern der Reihe für Δy eine einfache Recursion, vermöge deren man leichter zum Resultate gelangt.

Man hat:

$$\Delta^m y = K\,\Delta x^m + \overset{1}{K}\,\Delta x^{m+1} + \dots$$

wo $K \Delta x^m = d^m y$ ist, und überhaupt alle Coefficienten gewisse Functionen von x bedeuten. Nimmt man auf beiden Seiten dieser Gleichung die Differenz, so hat man:

$$\Delta \Delta^m y = \Delta^{m+1} y = \Delta K \Delta x^m + \Delta \overset{1}{K} \Delta x^{m+1} + \ldots$$

wo $\Delta K \Delta x^m = d^{m+1} y$ seyn würde, wenn die Reihe schon gehörig nach Potenzen von Δx geordnet wäre. Da nämlich $K, \overset{1}{K} \ldots$ selbst noch Functionen von x sind, so kann man $\Delta K, \Delta \overset{1}{K}$ u. s. w. noch nach Potenzen non Δx entwickeln, und man wird haben:

$$\Delta K = \overset{1}{a} \Delta x + \overset{2}{a} \Delta x^2 + \ldots$$

$$\text{wo } \overset{1}{a} \Delta x = \overset{1}{\mathfrak{T}} \Delta K = dK, \text{ also } \overset{1}{a} = \frac{dK}{\Delta x} \text{ ist.}$$

Ferner:

$$\Delta \overset{1}{K} = \overset{1}{b} \Delta x + \overset{2}{b} \Delta x^2 + \ldots$$

$$\text{wo wieder } \overset{1}{b} \Delta x = d\overset{1}{K} \text{ also } \overset{1}{b} = \frac{d\overset{1}{K}}{\Delta x} \text{ ist.}$$

Folglich ist:

$$\Delta^{m+1} y = \overset{1}{a} \Delta x^{m+1} + \overset{2}{a} x^{m+2} + \ldots$$
$$+ \overset{1}{b} x^{m+2} + \ldots$$

folglich ist:

$$\overset{1}{\mathfrak{T}} \Delta^{m+1} y = d^{m+1} y = \overset{1}{a} \Delta x^{m+1}$$

da aber $\overset{1}{a} = \frac{dK}{\Delta x}$, so hat man:

$$d^{m+1} y = dK \Delta x^m = d[K \Delta a^m]$$

und da $K \Delta x^m = d^m y$, so erhält man:

$$d^{m+1} y = d(d^m y)$$

Wir haben also den wichtigen Satz, daß das **m+1te Differential einer Function entstehe, wenn man das Differential des mten Differentials derselben Function berechnet.**

Das Differential einer Function finden, heißt dieselbe **differentiiren.** Wenn man daher Regeln, wonach jede Function differentiirt werden kann, in seiner Gewalt hat, so kann man durch ein gleichförmiges Verfahren die Reihe von Δy darstellen, denn jedes folgende Glied entstehet durch Differentiation des vorhergehenden.

§. 12.

Wir haben bei den vorhergehenden Untersuchungen vorausgesetzt, x sey die ursprüngliche Hauptgröße der Function y. Man kann aber auch die Annahme machen, und dieser Fall wird häufig vorkommen, daß dieses x selbst wieder eine Function einer andern Hauptgröße z sey, in welchem Falle z die ursprüngliche Hauptgröße der Function y ist u. s. f.

Es muß bemerkt werden, daß man die Entwickelung einer Function immer in Beziehung auf die ursprüngliche Hauptgröße verlangt, und daß man also unter dem ersten Gliede von Δy oder dem Differentiale von y immer dasjenige Glied verstehe, welches in die niedrigste Potenz der Differenz der ursprünglichen Hauptgröße multiplicirt ist.

Hat man daher

$$y = \varphi(x)$$

wobei aber

$$x = \psi(z)$$

ist, so hat man, wenn man für z den Werth $z + \Delta z$ setzt, wodurch x in $x + \Delta x$ und also auch y in $y + \Delta y$ übergehet, und Δy nach Potenzen von Δx entwickelt,

$$\Delta y = \overset{1}{A}\,\Delta x + \overset{2}{A}\,\Delta x^2 + \ldots \text{ aber}$$

$\overset{1}{\mathfrak{T}}\,\Delta y$ oder dy nicht $= \overset{1}{A}\,\Delta x$, sondern, weil Δx selbst noch durch eine Reihe von der Form

$$\Delta x = \overset{1}{a}\,\Delta z + \overset{2}{a}\,\Delta z^2 + \ldots$$

dargestellt wird, und man daher, nachdem dieser Werth von Δx in Δy substituirt ist,

$$\begin{aligned}\Delta y = \overset{1}{A}\overset{1}{a}\,\Delta z &+ \overset{1}{A}\,\overset{1}{a}\,\Delta z^2 + \ldots\\ &+ \overset{2}{A}\overset{1}{a}{}^2\,\Delta z^2 + \ldots\end{aligned}$$

erhält, findet man

$$\overset{1}{\mathfrak{T}}\,\Delta y = dy = \overset{1}{A}\,\overset{1}{a}\,\Delta z.$$

Nun ist aber:

$$\overset{1}{a}\,\Delta z = \overset{1}{\mathfrak{T}}\,\Delta x = dx$$

folglich hat man

$$dy = \mathrm{A}\,dx.$$

Um also, wenn $y = \varphi(x)$, und x selbst noch eine Function einer anderen Hauptgröße z ist, das Differential von y zu finden, verfährt man eben so, als ob x selbst die ursprüngliche Hauptgröße wäre, setzt aber anstatt Δx den Werth dx, worauf man dann in dieses Differential von y noch für x und dx die von z abhängenden Werthe substituiren muß.

Sey übrigens, wenn $y = \varphi(x)$, x selbst noch eine Function von z, der Taylorische Lehrsatz, oder die Reihe

$$\Delta y = \overset{1}{\Sigma}\,\Delta y + \frac{\overset{1}{\Sigma}\Delta^2 y}{1.2} + \frac{\overset{1}{\Sigma}\Delta^3 y}{1.2.3} \ldots + \frac{\overset{1}{\Sigma}\Delta^r y}{1.2..r} \ldots$$

oder

$$\Delta y = dy + \frac{d^2y}{1.2} + \frac{d^3y}{1.2.3} \ldots + \frac{d^ry}{1.2..r} \ldots$$

behält dennoch ihre Richtigkeit, nur muß man sich für Δx noch die Reihe

$$dx + \frac{d^2x}{1.2} + \frac{d^3x}{1.2.3} + \ldots + \frac{d^rx}{1.2..r} \ldots$$

welche nach Potenzen von Δz fortschreitet, substituirt gedenken, wodurch sich auch Δy in eine nach Potenzen von Δz fortschreitende Reihe verwandelt, deren erstes Glied immer $= \mathrm{A}\,dx$ seyn wird.

Da übrigens in der Reihe von Δy jedes folgende Glied durch Differentiation des vorhergehenden entstehet, so kann man auch, ohne die Substitutionen, welche im Allgemeinen weitläufig sind, vorzunehmen, das zweite Glied, oder das, welches Δz^2 enthält, durch Differentiation des Ausdrucks $\mathrm{A}\,dx$ finden, und durch dasselbe Verfahren das dritte, vierte und überhaupt jedes folgende Glied ableiten. Hier aber dient zur Bemerkung, daß das Differential von $\mathrm{A}\,dx$ oder $d(\mathrm{A}dx)$ nicht $= dx.d\mathrm{A}$ sey, da dx selbst noch die Hauptgröße z enthält, und daher bei der Differentiation mit betrachtet werden muß. Es kömmt hier darauf an, das Differential eines Products aus zwei Factoren zu finden, welche beide Functionen derselben Hauptgröße sind, wozu die Regeln im Nachfolgenden gegeben werden.

§. 13.

Man pflegt gewöhnlich bei der Differentiation einer Function die Differenz der Hauptgröße x nicht durch Δx, sondern durch das Differentialzeichen dx anzudeuten, ein Verfahren, welches sich eigentlich durch nichts rechtfertigen läßt, indem es, wenn x, als ursprüngliche Hauptgröße, nicht mehr durch eine Function einer andern Größe z gegeben ist, für die Differenz von x oder Δx keine Reihe von der Form

$$\overset{1}{B}\Delta z + \overset{2}{B}\Delta z^2 \ldots$$

folglich auch kein erstes Glied einer solchen, d. h. kein Differential von x giebt. Nur in dem Falle, wenn x selbst noch Function einer anderen Hauptgröße ist, giebt es ein Differential von x, und hier muß man bei der Differentiation stets dx statt Δx setzen, wie man eben gesehen hat. Beides läuft übrigens ganz auf eins hinaus, wenn man jene Annahme einmal machen will, jedoch ist kein Zweifel, daß die Unterscheidung beider Zeichen bestimmter ist, und Vorzüge hat. Man wird z. B. bei irgend einem aus y, dy, x, Δx zusammengesetzten Ausdrucke sogleich erkennen können, welches die Function und welches die Hauptgröße sey. u. s. w.

Regeln des Differentiirens.

§. 14.

Es sey y eine Function von x, sie bestehe aus zwei Theilen X, Z, wovon jeder wieder Function von x ist, so hat man (§. 4.)

$$\Delta y = \Delta X + \Delta Z$$

Nun ist:

$$\Delta X = \overset{1}{A}\Delta x + \overset{2}{A}\Delta x^2 \ldots$$

wo $\overset{1}{A}\Delta x = dX$ ist.

Ferner ist:

$$\Delta Z = \overset{1}{B}\Delta x + \overset{2}{B}\Delta x^2 \ldots$$

wo $dZ = \overset{1}{B}\Delta x$ ist. Folglich hat man:

$$\Delta y = (\overset{1}{A} + \overset{1}{B})\Delta x + (\overset{2}{A} + \overset{2}{B})\Delta x^2 + \ldots$$

daher ist:

$$dy = \overset{1}{A}\,\Delta x + \overset{1}{B}\,\Delta x = dX + dZ = d(X+Z).$$

d. h. das Differential der Summe zweier Functionen von x, ist gleich der Summe der einzelnen Differentiale derselben.

Dasselbe gilt auch von der Differenz zweier Functionen. Eben so ist, wenn man hat

$$y = Y + X + Z = (Y + X) + Z,$$
$$dy = d(Y + X + Z) = d(Y + X) + dZ = dY + dX + dZ.$$

§. 15.

Es sey:

$$y = Y \,.\, X,$$

wo wieder Y und X gewisse beliebige Functionen von x bedeuten, so ist

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= (Y + \Delta Y)\,.\,(X + \Delta X) \\ &= XY + X\,\Delta Y + Y\,\Delta X + \Delta Y\,\Delta X \end{aligned}$$

also

$$\Delta y = X\,\Delta Y + Y\,\Delta X + \Delta Y\,\Delta X$$

Nun ist aber:

$$\Delta Y = \overset{1}{A}\,\Delta x + \overset{2}{A}\,\Delta x^2 \ldots$$
$$\Delta X = \overset{1}{B}\,\Delta x + \overset{2}{B}\,\Delta x^2 \ldots,$$

wo also $dY = \overset{1}{A}\,\Delta x$ und $dX = \overset{1}{B}\,\Delta x$.

Folglich hat man:

$$\begin{aligned} \Delta y = X\overset{1}{A}\,\Delta x &+ X\overset{2}{A}\,\Delta x^2 \ldots \\ + Y\overset{1}{B}\,\Delta x &+ Y\overset{2}{B}\,\Delta x_2 \ldots \\ &+ \overset{1}{A}\overset{1}{B}\,\Delta x^2 \ldots \end{aligned}$$

wo also $\overset{1}{\mathfrak{T}}\,\Delta y$ oder $dy = X\overset{1}{A}\,\Delta x + Y\overset{1}{B}\,\Delta x = X\,dY + Y\,dX = dXY$

§. 16.

Es sey ferner

$$y = \frac{Y}{X},$$

wo sowohl Y als X also auch y Function von x ist, so hat man:

$$Y = Xy \text{ und}$$
$$dY = X\,dy + y\,dX$$

folglich:

$$dy = \frac{dY - y\,dX}{X}$$
$$= \frac{dY - \frac{Y}{X}\,dX}{X}$$
$$= \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2} = d\,\frac{Y}{X}$$

§. 17.

Es werde jetzt die Function y näher bezeichnet, und um den einfachsten Fall anzunehmen, sey:

$$y = ax^n$$

so ist:

$$\Delta y = nax^{n-1}\ \Delta x + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\ x^{n-2}\ \Delta x^2\ \ldots$$

folglich

$$dy = nax^{n-1}\ \Delta x$$

Da dieses direct aus dem Binomischen Lehrsatze folgt, und derselbe für alle Exponenten gilt, wie die Analysis lehrt, so ist diese Regel der Differentiation allgemein, n sey eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl.

Es sey z. B.

$$y = ax^3,$$

so ist:

$$dy = 3ax^2\,\Delta x$$

Ist ferner:

$$y = a\sqrt[5]{x} = ax^{\frac{1}{5}}$$

so findet man

$$dy = \tfrac{1}{5}ax^{\frac{1}{5}-1}\ \Delta x = \tfrac{1}{5}ax^{-\frac{4}{5}}\ \Delta x = \frac{a\,\Delta x}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

hätte man

$$y = \frac{a}{x^3} = ax^{-3}$$

so ist:

$$dy = -3ax^{-4}\,\Delta x = -\frac{3a\,\Delta x}{x^4}$$

Ist:

$$y = ax^n + bx^m + cx^p + gx^q$$

so ist, vermöge §. 14.

$$dy = (nax^{n-1} + mbx^{m-1} + cpx^{p-1} + gqx^{q-1})\,\Delta x$$

§. 8.

Es sey ferner

$$y = aX^n$$

und X eine Function von x, so hat man, nach §. 12.

$$dy = naX^{n-1}\,dX$$

in welche Ausdrücke man noch für X und dX die Werthe zu setzen hat, welche ihnen als Functionen von x zukommen.

Z. B. Es sey:

$$y = (a + bx^2)^n$$

so ist:

$$dy = n(a + bx^2)^{n-1}\, d(a + bx^2)$$
$$= n(a + bx^2)^{n-1}\, 2bx\,\Delta x$$

Sey ferner:

$$y = \sqrt{(ax - \frac{b}{a}x^2)} = (ax - \frac{b}{a}x^2)^{\frac{1}{2}}$$

so ist:

$$dy = \tfrac{1}{2}(ax - \frac{b}{a}x^2)^{\frac{1}{2}-1}\, d(ax - \frac{b}{a}x^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}(ax - \frac{b}{a}x^2)^{-\frac{1}{2}}\,(a - \frac{2b}{a}x)\,\Delta x$$
$$= \frac{(a - \frac{2b}{a}x)\,\Delta x}{2\sqrt{(ax - \frac{b}{a}x^2)}}$$

Um von den Formeln:

$$dYX = X\,dY + Y\,dX \text{ und } d\frac{Y}{X} = \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2}$$

einige Beispiele zu geben, so sey:

$$y = (x^2 + 4x + 2)(x^3 + 6x + 8)$$

so ist:

$$dy = (x^2 + 4x + 2)(3x^2 + 6)\,\Delta x + (x^3 + 6x + 8)(2x + 4)\,\Delta x$$

Ferner sey:

$$y = \frac{x^2 - 2x - 1}{3x + 5}$$

so hat man:

$$dy = \frac{(3x + 5)(2x - 2)\,\Delta x - 3(x^2 - 2x - 1)\,\Delta x}{(3x + 5)^2}$$
$$= \frac{3x^2 + 10x - 7}{(3x + 5)^2}\,\Delta x$$

Man habe ferner:

$$y = \sqrt{(\frac{1 - x}{1 + x})} = (\frac{1 - x}{1 + x})^{\frac{1}{2}}$$

so ist:

$$dy = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad d\frac{1-x}{1+x}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} \;\Delta x$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} \;\frac{2\Delta x}{(1+x)^2} = -\sqrt{\frac{1}{(1-x)(1+x)^3}} \cdot \Delta x$$

$$= -\sqrt{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)} \cdot \frac{\Delta x}{1+x}$$

§. 19.

Hat man die transcendente Gleichung:

$$y = e^x,$$

so ist

$$y + \Delta x = e^{x+\Delta x} = e^x . \; e^{\Delta x}$$

Nun ist aber aus der Analysis bekannt, daß man habe:

$$e^{\Delta x} = 1 + \frac{\Delta x}{1} + \frac{\Delta x^2}{1.2} + .. + \frac{\Delta x^r}{1.2..r}$$

Also ist:

$$y + \Delta y = e^x + e^x \Delta x + \frac{e^x \Delta x^2}{1.2} \; ....$$

oder, auf beiden Seiten $y = e^x$ abgezogen,

$$\Delta y = e^x \Delta x + \frac{e^x \Delta x^2}{1.2} + ...$$

daher hat man,

$$dy = e^x \Delta x.$$

Wäre aber x selbst noch eine Function einer andern Größe z, so würde man nach dem Vorhergehenden setzen müssen:

$$dy = e^x dx$$

Es sey z. B.

$$y = e^{3x^2 + 7x + 2}$$

so ist:

$$dy = e^{3x^2 + 7x + 2} \; (6x + 7) \; \Delta x.$$

§. 20.

Hätte man die Gleichung:

$$y = Q^x,$$

so sey $Q = e^p$, wobei also $p = \log. \text{nat.}\ Q$ ist, so hat man:

$$y = e^{px},$$

und daher:

$$dy = e^{px}\, p\, \Delta x$$
$$= Q^x \Delta x.\ \log.\ \text{nat.}\ Q$$

Ist aber x selbst noch Function, so hat man:

$$dy = Q^x,\ \log.\ \text{nat.}\ Q.\ dx$$

z. B. es sey:

$$y = 10^{x^2 - bx + c}$$

so ist:

$$dy = 10^{x^2 - bx + c} \log.\ \text{nat.}\ 10.\ (2x - b)\, \Delta x.$$

§. 21.

Man habe:

$$y = \log.\ \text{nat.}\ x$$

so ist:

$$y + \Delta y = \log.\ \text{nat.}\ (x + \Delta x)$$
$$= \log.\ \text{nat.}\ x.(1 + \frac{\Delta x}{x})$$
$$= \log.\ \text{nat.}\ x + \log.\ \text{nat.}\ (1 + \frac{\Delta x}{x})$$

daher:

$$\Delta y = \log.\ \text{nat.}\ (1 + \frac{\Delta x}{x})$$
$$= \frac{\Delta x}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{\Delta x^2}{x^2} + \ldots (-1)^{r-1}\,\frac{\Delta x^r}{r.x^r}$$

folglich erhält man:

$$\overset{1}{\mathfrak{T}}\, \Delta y = dy = \frac{\Delta x}{x}$$

Ist aber x selbst noch Function einer andern Hauptgröße, so ist:

$$dy = d \log.\ \text{nat.}\ x = \frac{dx}{x}$$

Hätte man aber:

$$y = \log.\ x\ \text{bas.}\ Q,$$

so ist:

$$y = \frac{\log.\ \text{nat.}\ x}{\log.\ \text{nat.}\ Q}$$

folglich

$$dy = \frac{\Delta x}{x.\ \log.\ \text{nat.}\ Q}$$

oder, wenn x noch Function einer anderen Hauptgröße ist:

$$dy = \frac{dx}{x.\ \log.\ \text{nat.}\ Q}$$

Z. B. Man habe:

$$y = \log.\ \mathrm{nat.}\ (x^3 - 2ax^2 + bx - c)$$

so ist:

$$dy = \frac{(3x^2 - 4ax + b)\,\Delta x}{x^3 - 2ax^2 + bx - c}$$

Ist ferner

$$y = \log.\ \left(\frac{x^2 - 2bx}{3ax^3 + cx^2}\right)\ \mathrm{bas.}\ Q$$

so hat man

$$dy = \frac{(3ax^3 + cx^2)(2x - 2b)\,\Delta x - (x^2 - 2bx)(9ax^2 + 2cx)\,\Delta x}{(3ax^3 + cx^2)^2 \left(\frac{x^2 - 2bx}{3ax^3 + cx^2}\right)\ \log.\ \mathrm{nat.}\ Q}$$

$$= \frac{(2x - 2b)\,\Delta x}{(x^2 - 2bx)\ \log.\ \mathrm{nat.}\ Q} - \frac{(9ax^2 + 2cx)\,\Delta x}{(3ax^3 + cx^2)\ \log.\ \mathrm{nat.}\ Q}.$$

§. 22.

Es sey:

$$y = z^x,$$

wo sowohl z, als x, Functionen einer anderen Hauptgröße bedeuten mögen, so hat man:

$$\log.\ \mathrm{nat.}\ y = x\ \log.\ \mathrm{nat.}\ z.$$

daher:

$$\frac{dy}{y} = x\,\frac{dz}{z} + \log.\ \mathrm{nat.}\ z\ dx$$

also:

$$dy = yx\frac{dz}{z} + y\log.\ \mathrm{nat.}\ z\ dx$$

$$= z^x x\frac{dz}{z} + z^x \log.\ \mathrm{nat.}\ z\ dx$$

Z. B. Es sey:

$$y = (a + bx^2)^{x^3 + bx^4}$$

so ist:

$$dy = x.(a + bx^2)^{x^3 + bx^4}\,\frac{2bx\,\Delta x}{a + bx^2}$$

$$+ (a + bx^2)^{x^3 + bx^4}\ \log.\ \mathrm{nat.}\ (a + bx^2)\ (3x^2 + 4bx^3)\ \Delta x$$

$$= \left[\frac{2bx^2}{a + bx^2} + (3x^2 + 4bx^3)\log.\ \mathrm{nat.}\,(a + bx^2)\right]$$

$$(a + bx^2)^{x^3 + bx^4}\ \Delta x$$

§. 23.

Wenn:

$$y = Q^{b^x}$$

so hat man, wenn $b^x = z$ gesetzt wird,

$$dy = Q^z dz \log. \text{ nat. } Q$$

$$= Q^{b^x} b^x \log. \text{ nat. } Q. \log. \text{ nat. } b. \Delta x$$

§. 14.

Es sey:

$$y = z^{y^x}$$

wo z, y, x Functionen einer gewissen Hauptgröße bedeuten, so ist, wenn man $y^x = v$ setzt.

$$dy = dz^v = z^v v\frac{dz}{z} + z^v \log. \text{ nat } z\, dv$$

$$= z^v v\frac{dz}{z} + z^v \log. \text{ nat. } z\, (y^x x\frac{dy}{y} + y^x \log. \text{ nat. } y\, dx)$$

$$= z^{y^x} y^x \frac{dz}{z} + z^{y^x} \log. \text{ nat. } z\, (y^x x\frac{dy}{y} + y^x \log. \text{ nat } y\, dx)$$

$$= z^{y^x} y^x \left[\frac{dz}{z} + (x\frac{dy}{y} + \log. \text{ nat. } y. dx) \log. \text{ nat. } z\right]$$

§. 25.

Will man die Reihen

$$\text{Sin } x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2..5} \ldots + (-1)^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{1.2.(2n+1)} \ldots$$

$$\text{Cos } x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2..4} \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1.2..2n} \ldots$$

aus der Analysis voraussetzen; so ist es leicht, die Differentiale der trigonometrischen Größen, als Sin x, Cos x, Tang x, u. s. w. abzuleiten.

Es sey:

$$y = \text{Sin } x,$$

so ist:

$$y + \Delta y = \text{Sin}(x + \Delta x) = \text{Sin } x \text{ Cos } \Delta x + \text{Sin } \Delta x \text{ Cos } x$$

da nun

$$\text{Cos } \Delta x = 1 - \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} \ldots$$

$$\text{Sin } \Delta x = \Delta x - \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \frac{\Delta x^5}{1.2..5} \ldots$$

so hat man:

$$y + \Delta y = \mathrm{Sin}\, x - \mathrm{Sin}\, x \frac{\Delta x^2}{2} + \mathrm{Sin}\, x \frac{\Delta x^4}{1..4} \ldots$$
$$+ \mathrm{Cos}\, x\, \Delta x - \mathrm{Cos}\, x \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \ldots$$
$$= \mathrm{Sin}\, x + \mathrm{Cos}\, x.\, \Delta x - \mathrm{Sin}\, x \frac{\Delta x^2}{2} - \mathrm{Cos}\, x \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \ldots$$
$$\Delta y = \mathrm{Cos}\, x.\, \Delta x - \mathrm{Sin}\, x \frac{\Delta x^2}{2} - \mathrm{Cos}\, x \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \ldots$$

folglich hat man:

$$dy = \mathrm{Cos}\, x\, \Delta x$$

oder, wenn x noch eine Function von z ist, so hat man:

$$dy = \mathrm{Cos}\, x\, dx$$

z. B. Man habe:

$$y = \mathrm{Sin}\,(x^2 - bx + c)$$

so ist:

$$dy = \mathrm{Cos}\,(x^2 - bx + c).(2x - b)\,\Delta x.$$

Ferner sey

$$y = \mathrm{Sin}\,(x^2 + bx^3)^n,$$

so ist:

$$dy = \mathrm{Cos}\,(x^2 + bx^3)^n.\, n(x^2 + bx^3)^{n-1}\,(2x + 3bx^2)\,\Delta x$$

Es sey ferner:

$$y = \sqrt{[\mathrm{Sin}\,(x^n + bx^{n-1} + c)]}$$

so ist:

$$dy = \tfrac{1}{2}\,[\mathrm{Sin}\,(x^n + bx^{n-1} + c)]^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{Cos}\,(x^n + bx^{n-1} + c).(nx^{n-1} + (n-1)\,bx^{n-2})\,\Delta x$$
$$= \frac{(nx^{n-1} + (n-1)\,bx^{n-2})\,\Delta x.\,\mathrm{Cos}\,(x^n + bx^{n-1} + c)}{2\sqrt{(\mathrm{Sin}\,(x^n + bx^{n-1} + c)}}$$

u. dergl.

§. 26.

Es sey:

$$y = \mathrm{Cos}\, x = \sqrt{(1 - (\mathrm{Sin}\, x)^2)}$$

so ist:

$$dy = -\tfrac{1}{2}\,(1 - (\mathrm{Sin}\, x)^2)^{-\frac{1}{2}}\, 2\,\mathrm{Sin}\, x\, d\,\mathrm{Sin}\, x$$
$$= -\frac{\mathrm{Sin}\, x.\ \mathrm{Cos}\, x.\ \Delta x}{\sqrt{(1 - (\mathrm{Sin}\, x)^2)}} = -\mathrm{Sin}\, x\ \Delta x$$

oder, wenn x noch eine Function einer Hauptgröße seyn sollte, so hat man

$$dy = d\,\mathrm{Cos}\, x = -\mathrm{Sin}\, x\, dx.$$

z. E. Es sey:

$$y = \operatorname{Cos}\left(\frac{x^2 - bx}{3x + c}\right)$$

so ist:

$$dy = -\operatorname{Sin}\left(\frac{x^2 - bx}{3x + c}\right) \frac{(3x + c)(2x - b)\Delta x - 3(x^2 - bx)\Delta x}{(3x + c)^2}$$

$$= -\frac{2x - b}{3x + c} \operatorname{Sin}\left(\frac{x^2 - bx}{3x + c}\right)\Delta x + \frac{3(x^2 - bx)}{(3x + c)^2} \operatorname{Sin}\left(\frac{x^2 - bx}{3x + c}\right)\Delta x$$

§. 27.

Man habe:

$$y = \operatorname{Tang.} x = \frac{\operatorname{Sin.} x}{\operatorname{Cos.} x}$$

so ist:

$$dy = \frac{\operatorname{Cos} x\, d \operatorname{Sin} x - \operatorname{Sin} x\, d \operatorname{Cos} x}{(\operatorname{Cos} x)^2}$$

$$= \frac{(\operatorname{Cos} x)^2 + (\operatorname{Sin} x)^2}{(\operatorname{Cos} x)^2} \Delta x$$

also hat man:

$$dy = d \operatorname{Tang} x = \frac{\Delta x}{(\operatorname{Cos} x)^2}$$

oder, wenn x noch Function einer andern Hauptgröße ist:

$$dy = \frac{dx}{(\operatorname{Cos} x)^2}.$$

z. B. Es sey:

$$y = \operatorname{Tang}(a + bx - cx^2)^n$$

so hat man,

$$dy = \frac{n(a + bx - cx^2)^{n-1}(b - 2cx)\Delta x}{(\operatorname{Cos}(a + bx - cx^2)^n)^2}$$

§. 28.

Ist:

$$y = \operatorname{Cotang.} x = \frac{1}{\operatorname{Tang.} x}$$

so hat man:

$$dy = -\frac{d \operatorname{Tang} x}{(\operatorname{Tang} x)^2} = -\frac{\Delta x}{(\operatorname{Cos} x)^2 (\operatorname{Tang} x)^2}$$

$$= -\frac{\Delta x}{(\operatorname{Sin} x)^2} = d \operatorname{Cotang.} x$$

oder, wenn x noch Function einer gewissen Hauptgröße ist:

$$d \operatorname{Cotang} x = -\frac{dx}{(\operatorname{Sin} x)^2}$$

z. B. Es sey:

$$y = [\operatorname{Cotang}(mx^m + bx^{m-1})]^n$$

so ist:

$$dy = -\frac{n[\text{Cot.}(mx^m + bx^{m-1})]^{n-1}(m^2x^{m-1} + b(m-1)x^{m-2})\triangle x}{[\text{Sin}(mx^m + bx^{m-1})]^2}$$

§. 29.

Man habe ferner:

$$y = \text{Sec. } x$$

so ist:

$$dy = d\frac{1}{\text{Cos } x} = -\frac{d\,\text{Cos } x}{(\text{Cos } x)^2} = \frac{\text{Sin } x \triangle x}{(\text{Cos } x)^2}$$

$$= \frac{\text{Tang } x \triangle x}{\text{Cos } x} = \text{Tang } x. \text{ Sec } x \triangle x$$

oder, wenn x noch als Function einer anderen Hauptgröße gegeben ist:

$$d\,\text{Sec } x = \text{Tang } x. \text{ Sec } x\, dx$$

z. B. Es sey:

$$y = \text{Sec }(x^2 - 3x + 2)$$

so ist:

$$dy = \text{Tang}(x^2 - 3x + 2).\ \text{Sec}(x^2 - 3x + 2).(2x - 3) \triangle x$$

$$= \frac{\text{Tang }(x^2 - 3x + 2)}{\text{Cos }(x^2 - 3x + 2)}(2x - 3) \triangle x$$

§. 30.

Ist die Gleichung

$$y = \text{Cosec. } x$$

gegeben, so hat man:

$$dy = d\frac{1}{\text{Sin } x} = -\frac{d\,\text{Sin } x}{(\text{Sin } x)^2} = -\frac{\text{Cos } x. \triangle x}{(\text{Sin } x)^2}$$

$$= -\frac{\text{Cotang } x}{\text{Sin } x} \triangle x = -\text{Cotang } x. \text{ Cosec } x. \triangle x.$$

Oder, wenn x noch als Function einer andern Hauptgröße angesehen werden soll,

$$d\,\text{Cosec } x = -\text{Cotang } x. \text{ Cosec } x\, dx.$$

z. B. Es sey:

$$y = \text{Cosec }(x - 3x^2)^n$$

so ist:

$$dy = -\text{Cot.}(x-3x^2)^n. \text{ Cosec}(x-3x^2)^n. n(x-3x^2)^{n-1}(1-6x) \triangle x$$

$$= -\frac{\text{Cotang}(x-3x^2)^n}{\text{Sin}(x-3x^2)^n}. n(x-3x^2)^{n-1} (1-6x) \triangle x.$$

§. 31.

Hätte man:

$$y = \text{Sin vers } x$$

so ist:

$$dy = d(1 - \text{Cos } x) = -d \text{Cos } x = \text{Sin } x \, \Delta x$$

oder, wenn x noch Function von einer andern Hauptgröße bedeutet,

$$d \text{ Sin vers } x = \text{Sin } x \, dx$$

z. B. Es sey:

$$y = \text{Sin vers } (x^2 + e^x)$$

so ist:

$$dy = \text{Sin } (x^2 + e^x) . (2x + e^x) \Delta x.$$

§. 32.

Ist endlich:

$$y = \text{Cos vers } x,$$

so hat man:

$$dy = d(1 - \text{Sin } x) = -\text{Cos } x \cdot \Delta x$$

oder, wenn x noch Function einer andern Hauptgröße seyn sollte:

$$d \text{ Cos vers } x = - \text{Cos } x \, dx.$$

z. B. Es sey:

$$y = \text{Cos vers } (x^n - bx \log x)^2$$

so ist:

$$dy = -2 \text{Cos}(x^n - bx \text{Log} x)^2 . (x^n - bx \log x)(nx^{n-1} - b - b \log x) \Delta x$$

§. 33.

Ist:

$$y = \varphi(x)$$

so kann man sich diese Gleichung umgeformt gedenken, so, daß x auf der einen Seite des Gleichheitszeichens allein, ein aus y zusammengesetzter Ausdruck oder eine Funtion von y auf der andern Seite desselben stehet, d. h. es wird auch x eine gewisse Function von y seyn, und zwar muß diese Function von y von der Form jener Function von x abhängen. Hat man daher:

$$y = \varphi(x),$$

so ist auch:

$$x = \psi(y)$$

Berechnet man also das Differential von y oder $\varphi(x)$, so ist dieses $A \triangle x$. Eben so ist, wenn man das Differential von x oder $\psi(y)$ berechnet, $dx = B \triangle y$. Da nun die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ von einander abhängen, und die eine von der andern abgeleitet, oder doch wenigstens abgeleitet gedacht werden kann; so muß dieses auch mit den Differentialen $d\varphi(x)$ und $d\psi(y)$ der Fall seyn, es muß das eine von dem andern auf eine gewisse Art abhängen, das eine sich aus dem andern herleiten lassen. In der That, es ist:

$$\triangle y = \triangle \varphi(x) = A \triangle x + \frac{\overset{2}{A}}{1.2} \triangle x^2 + \ldots$$

eben so:

$$\triangle x = \triangle \psi(y) = B \triangle y + \frac{\overset{2}{B}}{1.2} \triangle y^2 + \ldots$$

substituirt man diesen Werth von $\triangle x$ in obige Reihe für $\triangle y$, so erhält man:

$$\triangle y = AB \triangle y + \left.\begin{matrix} \frac{A\overset{2}{B}}{1.2} \\ + \frac{\overset{2}{A}B^2}{1.2} \end{matrix}\right\} \triangle y^2 + \ldots$$

wo man alle folgenden Glieder leicht berechnen kann. Soll aber diese Gleichung Statt finden, so müssen alle Coefficienten nach dem ersten $= 0$, der erste selbst muß aber $= 1$ seyn. Daraus erhält man:

$$AB = 1 \text{ oder } A = \frac{1}{B}$$

Berechnet man also das erste Differentialverhältniß aus der gegebenen Function $y = \varphi(x)$, so ist das Umgekehrte davon das erste Differentialverhältniß aus der Function $x = \psi(y)$, welche aus jener nach obiger Art abgeleitet wurde.

Nun ist $A = \frac{dy}{\triangle x}$ und $B = \frac{dx}{\triangle y}$, folglich hat man:

$$\frac{dy}{\triangle x} = \frac{\triangle y}{dx}$$

Unterscheidet man die Zeichen $\triangle$ und d bei der ursprünglichen Hauptgröße nicht, wie man bisher allgemein that, so scheint die Beziehung $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}$ von selbst schon zu erhellen, wobei man aber freilich nicht in Erwägung zog, daß das einemal unter dy etwas ganz anders verstanden werden soll, als das anderemal, welches ganz auf dieselbe Art mit dx der Fall ist.

§. 34.

Nach dieser Bemerkung ist es leicht, die Differentiale der Kreisbogen abzuleiten.

Hat man nämlich:

$$y = \text{Sin } x,$$

so ist x der Kreisbogen, dessen Sinus $= y$ ist, man bezeichnet dieses durch Arcus sinus y oder Arc. sin y, so, daß also durch Umkehrung obiger Gleichung

$$x = \text{Arc. sin } y$$

entstehet. Eben so folgt aus der Gleichung $z = \text{Cos } y$, die Beziehung $y = \text{Arc. Cos } z$. Aus $y = \text{Tang. } v$, folgt $v = \text{Arc. Tang. } y$ u. s. w.

Hat man daher die Beziehung

$$y = \text{Arc. Sin } x,$$

so ist umgekehrt:

$$x = \text{Sin } y$$

$$dx = \text{Cos } y \, \Delta y. \quad \frac{\Delta y}{dx} = \frac{1}{\text{Cos } y}$$

Kehrt man nun die Gleichung $x = \text{Sin } y$ wieder um, indem man y durch x ausdrückt, so kann man nach dem vorhergehenden §. auch $\frac{dy}{\Delta x} = \frac{d \text{ Arc. Sin } x}{\Delta x}$ ableiten, denn da $\frac{dy}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{dx}$ ist, so hat man:

$$\frac{d \text{ Arc. Sin } x}{\Delta x} = \frac{1}{\text{Cos } y} = \frac{1}{\sqrt{[1-(\text{Sin } y)^2]}}$$

oder, da $\text{Sin } y = x$,

$$dy = d \text{ Arc. Sin } x = \frac{\Delta x}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

Sollte jedoch x selbst noch Function einer andern Hauptgröße seyn, so ist:

$$d \text{ Arc. Sin } x = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

z. B. Man habe:

$$y = \text{Arc. Sin } (x^2 + 2ax^3)$$

so ist:

$$dy = \frac{(2x + 6ax^2)\,\Delta x}{\sqrt{[1-(x^2 + 2ax^3)^2]}}$$

Ist:

$$y = \text{Arc. Sin } e^{x - ax^2}$$

so ist

$$dy = \frac{e^{x-ax^2} (1 - 2ax) \Delta x}{\sqrt{(1 - e^{2x - 2ax^2})}}$$

§. 35.

Man habe:

$$y = \text{Arc. Cos } x,$$

so ist auch

$$x = \text{Cos } y, \text{ daher}$$

$$dx = - \text{Sin } y \; \Delta x$$

$$\text{oder } \frac{\Delta y}{dx} = - \frac{1}{\text{Sin } y}$$

Drehet man nun die Gleichung wieder um, so erhält man

$$\frac{dy}{\Delta x} = - \frac{1}{\text{Sin } y} = - \frac{1}{\sqrt{[1-(\text{Cos } y)^2]}}$$

also, da Cos $y = x$ ist.

$$dy = d \text{ Arc. Cos } x = - \frac{\Delta x}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

oder, wenn x noch Function einer andern Hauptgröße ist:

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

z. B. Es sey:

$$y = \text{Arc. Cos } (\log x)$$

so ist:

$$dy = - \frac{\Delta x}{x\sqrt{(1-(\log x)^2)}}$$

§. 36.

Es sey:

$$y = \text{Arc. Tang } x,$$

so ist:

$$x = \text{Tang } y,$$

$$dx = \frac{\Delta y}{(\text{Cos } y)^2}$$

folglich

$$\frac{\Delta y}{dx} = (\text{Cos } y)^2$$

Drehet man daher die Gleichung $x = \text{Tang } y$ wieder um, so hat man

$$\frac{dy}{\Delta x} = (\text{Cos } y)^2 = \frac{1}{1 + (\text{Tang } y)^2}$$

folglich, da $\text{Tang } y = x$,

$$dy = d\,\text{Arc. Targ} x = \frac{\Delta x}{1 + x^2}$$

oder, wenn x noch Function ist:

$$dy = \frac{dx}{1 + x^2}$$

z. B. Es sey:

$$y = \text{Arc. Tang } (x^2 + bx)$$

so hat man

$$dy = \frac{(2x + b)\,\Delta x}{1 + (x^2 + bx)^2}$$

Es sey ferner:

$$y = \text{Arc. Tang } (e^x - \text{Cos } x)$$

so ist:

$$dy = \frac{(e^x + \text{Sin } x)\,\Delta x}{1 + (e^x - \text{Cos } x)^2}$$

§. 37.

Hat man die Beziehung:

$$y = \text{Arc. Cot. } x$$

so ist:

$$x = \text{Cot } y \text{ und}$$

$$dx = -\frac{\Delta y}{(\text{Sin } y)^2} \text{ oder}$$

$$\frac{\Delta y}{dx} = -(\text{Sin } y)^2$$

daher hat man, nachdem man die Gleichung $x = \text{Cot. } y$ wieder umkehrt:

$$\frac{dy}{\Delta x} = -(\text{Sin } y)^2 = -\frac{1}{1 + (\text{Cot } y)^2}$$

und ist also für Cot y der Werth x gesetzt,

$$dy = d\,\text{Cotang } x = -\frac{\Delta x}{1 + x^2}$$

oder, wenn x noch als Function gedacht wird,

$$dy = -\frac{dx}{1 + x^2}$$

§. 38.

Es sey:

$$y = \text{Arc. Sec. } x$$

also

$$x = \text{Sec. } y,$$

$$dx = \frac{\text{Tang}\, y\, \Delta y}{\text{Cos}\ y}$$

daher:

$$\frac{\Delta y}{dx} = \frac{\text{Cos}\ y}{\text{Tang}\, y} = \frac{1}{\text{Tang}\, y.\ \text{Sec}\, y.}$$

$$= \frac{1}{\text{Sec}\, y \sqrt{[(\text{Sec}\, y)^2 - 1]}}$$

folglich nach der Umkehrung der Gleichung:

$$dy = \frac{\Delta x}{\text{Sec}\, y.\ \sqrt{[(\text{Sec}\, y)^2 - 1]}}$$

und für Sec y den Werth x gesetzt:

$$dy = d\,\text{Arc Sec}\ x = \frac{\Delta x}{x\sqrt{(x^2-1)}}$$

oder, wenn x noch Function ist:

$$dy = \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}}.$$

§. 39.

Sey ferner:

$$y = \text{Arc. Cosec. } x$$

also:

$$x = \text{Cosec. } y \text{ und}$$

$$dx = -\ \text{Cot.}\, y.\ \text{Cosec}\, y\ \Delta y$$

$$= -\ \text{Cosec}\, y \sqrt{[(\text{Cosec}\, y)^2 - 1]}\ \Delta y$$

folglich:

$$\frac{\Delta y}{dx} = -\frac{1}{\text{Cosec}\, y,\ \sqrt{[(\text{Cosec}\, y)^2 - 1]}}$$

und man hat daher nach Umkehrung der Gleichung:

$$\frac{dy}{\Delta x} = -\frac{1}{\text{Cosec}\, y\ \sqrt{[(\text{Cosec}\, y)^2 - 1]}}$$

$$= -\frac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}}$$

und also

$$dy = d\ \text{Arc. Cosec. } x = -\frac{\Delta x}{x\sqrt{(x^2-1)}},$$

oder, wenn x noch Function ist:

$$dy = -\frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}}$$

§. 40.

Ist:

$$y = \text{Arc. Sinvers. } x$$

also

$$x = \text{Sin vers } y$$

und

$$dx = \text{Sin } y \, \Delta y \text{ oder}$$

$$\frac{\Delta y}{dx} = \frac{1}{\text{Sin } y} = \frac{1}{\sqrt{[1-(1-\text{Sin vers } y)^2]}}$$

so hat man nach Umkehrung der Gleichung:

$$\frac{dy}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{[1-(1-\text{Sin vers } y)^2]}} = \frac{1}{\sqrt{[1-(1-x)^2]}}$$

und also

$$dy = d \,\text{Arc. Sin vers } x = \frac{\Delta x}{\sqrt{[1-(1-x)^2]}}$$

$$= \frac{\Delta x}{\sqrt{(1-x^2+2x-1)}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{(2x-x^2)}}$$

oder, wenn x noch Function seyn sollte:

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$$

§. 41.

Ist endlich;

$$y = \text{Arc. Cos vers. } x \text{ oder}$$

$$x = \text{Cos vers. } y \text{ und also}$$

$$dx = -\text{Cos } y \, \Delta y \text{ oder:}$$

$\frac{\Delta y}{dx} = -\frac{1}{\text{Cos } y}$, so hat man, nach der Umkehrung der Gleichung:

$$\frac{dy}{\Delta x} = -\frac{1}{\text{Cos } y} = -\frac{1}{\sqrt{[1-(1-\text{Cos vers } y)^2]}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{[1-(1-x)^2]}} = -\frac{1}{\sqrt{(2x-x^2)}}$$

folglich ist:

$$dy = -\frac{\Delta x}{\sqrt{(2x-x^2)}}$$

oder, wenn x noch Function:

$$dy = d \text{ Arc. Cos vers } x = -\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$$

§. 42.

Zur Uebung in der Anwendung der vorhergehenden Regeln des Differentiirens mögen noch folgende Beispiele dienen:

Es sey:

$$y = \log[\sqrt{(x^2 + ax^3 + b)}]$$

so ist, wenn y der natürliche Logarithmus seyn soll:

$$dy = \frac{d\sqrt{(x^2+ax^3+b)}}{\sqrt{(x^2+ax^3+b)}}$$

$$= \frac{(2x+3ax^2)\Delta x}{2(x^2+ax^3+b)}$$

Ist:

$$y = \log.\sqrt{\left(\frac{x^2+x}{2-x^3}\right)}$$

so hat man:

$$dy = \frac{d\sqrt{\left(\frac{x^2+x}{2-x^3}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{x^2+x}{2-x^3}\right)}} = \frac{(2-x^3)(2x+1)\Delta x + 3(x^2+x)x^2\Delta x}{2\left(\frac{x^2+x}{2-x^3}\right)(2-x^3)^2}$$

$$= \frac{(2x+1)\Delta x}{2(x^2+x)} + \frac{3x^2\Delta x}{2(2-x^3)}$$

Sey ferner:

$$y = \log(\mathrm{Sin}\, x^2) \text{ so ist:}$$

$$dy = \frac{d\,\mathrm{Sin}\, x^2}{\mathrm{Sin}\, x^2} = \frac{2x\,\mathrm{Cos}\, x^2\,\Delta x}{\mathrm{Sin}\, x^2}$$

Ferner habe man:

$$y = \log[\log(x^2 - x)]$$

so ist:

$$dy = \frac{d\log(x^2-x)}{\log(x^2-x)} = \frac{(2x-1)\Delta x}{(x^2-x)\log(x^2-x)}$$

Hätte man die Gleichung:

$$y = [\mathrm{Tang}(ax - bx^2)^3]^n,$$

so ist:

$$dy = n[\mathrm{Tang}(ax-bx^2)^3]^{n-1}\; d\,\mathrm{Tang}(ax-bx^2)^3$$

$$= n\,[\mathrm{Tang}(ax-bx^2)^3]^{n-1}\,\frac{3(ax-bx^2)^2(a-2bx)\,\Delta x}{[\mathrm{Cos}(ax-bx^2)^3]^2}$$

Sey:

$$y = \log(e^{x+bx^2} + a^{x-1}),$$

so ist:

$$dy = \frac{d\,e^{x+bx^2} + d\,a^{x-1}}{e^{x+bx^2} + a^{x-1}}$$

$$= \frac{(1+2bx)\Delta x\, e^{x+bx^2} + \log a.\ a^{x-1}\,\Delta x}{e^{x+bx^2} + a^{x-1}}$$

Man habe ferner:

$$y = \log[\mathrm{Arc.\,Sin}\, x + (x - bx^2)\,\mathrm{Arc.\,Tang}\tfrac{x}{a}]$$

so ist:

$$dy = \frac{d\,\mathrm{Arc.\,Sin}\,x + d\left[(x - bx^2)\,\mathrm{Arc.\,Tang}\,\frac{x}{a}\right]}{\mathrm{Arc.\,Sin}\,x + (x - bx^2)\,\mathrm{Arc.\,Tang}\,\frac{x}{a}}$$

$$= \frac{\frac{\Delta x}{\sqrt{(1-x^2)}} + (x-bx^2)\frac{\Delta x}{a(1+\frac{x^2}{a^2})} + (1-2bx)\mathrm{Arc Tang}\frac{x}{a}.\,\Delta x}{\mathrm{Arc.\,Sin}\,x + (x-bx^2)\,\mathrm{Arc.\,Tang}\,\frac{x}{a}.}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} + \frac{a(x-bx^2)}{a^2+x^2} + (1-2bx)\,\mathrm{Arc\,Tang}\frac{x}{a}}{\mathrm{Arc.\,Sin}\,x + (x-bx^2)\,\mathrm{Arc.\,Tang}\,\frac{x}{a}}\,\Delta x$$

Es sey ferner:

$$y = e^{\mathrm{Sin}\,x - a\,\mathrm{Cos}\,x}$$

so ist:

$$dy = (\mathrm{Cos}\,x + a\,\mathrm{Sin}\,x)\,e^{\mathrm{Sin}\,x - a\,\mathrm{Cos}\,x}\,\Delta x$$

Ferner sey:

$$y = Q^{\log x + b\,\mathrm{Arc.\,Tang}\,(x-1)}$$

so ist:

$$dy = Q^{\log x + b\,\mathrm{Arc.\,Tang}\,(x-1)}\left(\frac{\Delta x}{x} + \frac{b\,\Delta x}{1+(x-1)^2}\right)\log Q$$

$$= \left(\frac{1}{x} + \frac{b}{x^2-2x+2}\right)\Delta x\,\log Q.\,Q^{\log x + b\,\mathrm{Arc.\,Tang}\,(x-1)}$$

Man habe:

$$y = (\mathrm{Sin}\,x)^3 + \mathrm{Cos}\,x^2$$

so ist:

$$dy = 3\,(\mathrm{Sin}\,x)^2\,d\,\mathrm{Sin}\,x - 2\,\mathrm{Sin}\,x^2\,x\,\Delta x$$

$$= [3\,(\mathrm{Sin}\,x)^2\,\mathrm{Cos}\,x - 2x\,\mathrm{Sin}\,x^2]\,\Delta x$$

Ferner:

$$y = \mathrm{Cos}\,(mx - 2\,\mathrm{Sin}\,x)$$

so ist:

$$dy = -\mathrm{Sin}\,(mx - 2\,\mathrm{Sin}\,x)\,(m - 2\,\mathrm{Cos}\,x)\,\Delta x$$

Ist ferner:

$$y = \mathrm{Arc.\,Tang}\,[b\log(x - x^2\,\mathrm{Sin}\,x) + \mathrm{Arc.\,Sin}\,(x-b)]$$

so hat man:

$$dy = \frac{d[b\log\,(x-x^2\,\mathrm{Sin}\,x) + d\,\mathrm{Arc.\,Sin}\,(x-b)]}{1+[b\log\,(x-x^2\,\mathrm{Sin}\,x) + \mathrm{Arc.\,Sin}\,(x-b)]^2}$$

$$= \frac{\frac{b\,(1-x^2\,\mathrm{Cos}\,x - 2\,\mathrm{Sin}\,x.\,x)\,\Delta x}{x-x^2\,\mathrm{Sin}\,x} + \frac{\Delta x}{\sqrt{[1-(x-b)^2]}}}{1+[b\log\,(x-x^2\,\mathrm{Sin}\,x) + \mathrm{Arc.\,Sin}\,(x-b)]^2}$$

Man habe:

$$y = \text{Arc. Cos } [\log (a - bx^2) - c \text{ Cos } x]$$

so ist

$$dy = -\frac{d\log (a - bx^2) - c\, d \text{ Cos } x}{\sqrt{[1 - (\log (a - bx^2) - c \text{ Cos } x)^2]}}$$

$$= -\frac{c \text{ Sin } x \triangle x - \frac{2bx\triangle x}{a - bx^2}}{\sqrt{(1 - [\log (a - bx^2) - c \text{ Cos } x]^2)}}$$

Ferner habe man:

$$y = \text{Arc. Tang } [e^{x - a \text{ Cos } x} + g \log (\text{Tang } x)]$$

so ist:

$$dy = \frac{d\, e^{x - a \text{ Cos } x} + d g \log (\text{Tang } x)}{1 + [e^{x - a \text{ Cos } x} + g \log (\text{Tang } x)]^2}$$

$$= \frac{(1 + a \text{ Sin } x) \triangle x\, e^{x - a \text{ Cos } x} + g\frac{\triangle x}{(\text{Cos} x)^2 \text{Tang} x}}{1 + [e^{x - a \text{ Cos } x} + g \log (\text{Tang } x)]^2}$$

$$= \frac{(1 + a \text{ Sin } x) \triangle x\, e^{x - a \text{ Cos } x} + \frac{g\triangle x}{\text{Cos } x.\ \text{Sin } x}}{1 + [e^{x - a \text{ Cos } x} + g \log (\text{Tang } x)]^2}$$

Sey endlich:

$$y = (\text{Sin } x)^{\text{Cos } x}$$

so hat man

$$dy = (\text{Sin } x)^{\text{Cos } x} \left[\frac{\text{Cos } x^2\ \triangle x}{\text{Sin } x} - \text{Sin } x \log (\text{Sin } x)\ \triangle x\right]$$

§. 43.

Durch die in den vorhergehenden §. §. gegebenen Regeln ist man im Stande, jede Function zu differentiiren, und zwar wird man, da das zweite Differential das Differential des ersten, das dritte, das Differential des zweiten ist u. s. f., nicht verfehlen können, durch fortgesetzte Anwendung jener Regeln zu jedem höheren Differential einer Function von x zu gelangen. Hiebei ist jedoch zu merken, daß man, wenn $y = \varphi(x)$ und x selbst noch Function einer anderen Hauptgröße z ist, das Differential von y nicht $A \triangle x$, sondern $A\, dx$ setze, daß man ferner das zweite Differential von y, oder das Differential von $A\, dx$, nicht $dx . dA$, sondern $= A\, d^2x + dx\, dA$ habe, u. s. f. indem sowohl x, als auch dx, noch Function von z ist.

Es sey z. B.

$$y = ax^n + bx^{n-1}$$

wobei $x = z^m$ seyn mag, so hat man:

$$dy = nax^{n-1}\,dx + b(n-1)x^{n-2}\,dx$$

$$d^2y = nax^{n-1}\,d^2x + na(n-1)x^{n-2}\,dx^2$$
$$+ b(n-1)x^{n-2}\,d^2x + b(n-1)(n-2)x^{n-3}\,dx^2$$

Substituirt man für x, dx, d^2x die Werthe z^m, $mz^{m-1}\Delta z$, $m(m-1)z^{m-2}\Delta z^2$, so erhält man:

$$dy = naz^{m(n-1)}mz^{m-1}\Delta z + b(n-1)z^{m(n-2)}mz^{m-1}\Delta z$$
$$= mn.az^{mn-1}\Delta z + b.\,m(n-1)z^{mn-m-1}\Delta z$$
$$= mnaz^{mn-1}\Delta z + b.\,m(n-1)z^{m(n-1)-1}\Delta z$$

ferner:

$$d^2y = naz^{m(n-1)}m(m-1)z^{m-2}\Delta z^2$$
$$+ na(n-1)z^{m(n-2)}m^2z^{2m-2}\Delta z^2$$
$$+ b(n-1)z^{m(n-2)}m(m-1)z^{m-2}\Delta z^2$$
$$+ b(n-1)(n-2)z^{m(n-3)}m^2z^{2m-2}\Delta z^2$$
$$= amn(m-1)z^{mn-2}\Delta z^2 + ammn(n-1)z^{mn-2}\Delta z^2$$
$$+ b(mn-m)(m-1)z^{mn-m-2}\Delta z^2$$
$$+ b(mn-m)(mn-2m)z^{mn-m-2}\Delta z^2$$
$$= [a(mnm-mn) + ammn(n-1)]z^{mn-2}\Delta z^2$$
$$+ b[(mn-m)(m-1) + (mn-m)(mn-2m)]z^{m(n-1)-2}\Delta z^2$$
$$= amn(mn-1)z^{mn-2}\Delta z^2$$
$$+ bm(n-1)[m(n-1)-1]z^{m(n-1)-2}\Delta z^2$$

Dieselben Werthe für dy und d^2y wird man erhalten, wenn man gleich anfänglich in $y = ax^n + bx^{n-1}$ für x den Werth z^m substituirte, und darauf die Regeln des Differentiirens angewandt hätte.

Man hat alsdann:

$$y = az^{mn} + bz^{m(n-1)}$$

folglich:

$$dy = [amnz^{mn-1} + bm(n-1)z^{m(n-1)-1}]\Delta z$$

und

$$d^2y = [amn(mn-1)z^{mn-2} + bm(n-1)(m(n-1)-1)z^{m(n-1)-2}]\Delta z^2$$

welches mit den obigen Resultaten übereinstimmt.

Von den Differentialgleichungen.

§. 44.

Oft ist die Relation zwischen zwei Größen x und y nicht in der Gestalt $y = \varphi(x)$, d. h. nicht so gegeben, daß y allein auf der einen Seite des Gleichheitszeichens, ein blos aus x und andern Nebengrößen zusammengesetzter Ausdruck auf der andern Seite desselben stehet; sondern beide Größen, x und y, sind mit einander durch analytische Operationen so verbunden, daß man, um die eine durch die andere auszudrücken, erst eine Gleichung auflösen muß.

Die erste Form der Function ist die entwickelte, und man stellt sie allgemein durch $y = \varphi(x)$ vor, die zweite nennt man die verwickelte Form der Function, und man kann sie allgemein durch das Schema $\varphi(x, y) = o$ darstellen.

§. 45.

Ist eine Function y von x in der verwickelten Gestalt gegeben, und man will das Differential von y finden, so könnte man die Gleichung auflösen, d. h. y allein durch x ausdrücken, und dann nach dem Vorhergehenden differentiiren: allein man gelangt, ohne diese Operation vorzunehmen, durch folgende Betrachtung zum Resultate.

Das Schema der verwickelten Function ist

$$\varphi(x, y) = o$$

wo man sich unter $\varphi(x, y)$ irgend einen aus x, y und andern Nebengrößen auf irgend eine Art arithmetisch zusammengesetzten Ausdruck gedenkt.

Es erhalte x, als die ursprüngliche Hauptgröße ein Inkrement Δx, wodurch auch die davon abhängende Größe y ein solches annehmen wird. Hierdurch wird die Function $\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y)$, und da $\varphi(x, y)$ für jeden Werth von x, also auch für $x + \Delta x$ stets $= o$ seyn soll, so hat man:

$$\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) = o.$$

Es ist also auch

$$\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \varphi(x, y) = o$$

d. h. man hat:

$$\Delta \varphi(x, y) = o.$$

Setzt man in $\varphi(x, y)$ zuerst für x den Werth $x + \Delta x$, und entwickelt diesen Ausdruck so, daß man dabei y als eine Nebengröße betrachtet, so hat man dafür die Reihe:

$$\varphi(x, y) + A \Delta x + \overset{2}{A} \Delta x^2 \ldots$$

wo $A \Delta x$ das Differential von $\varphi(x, y)$ ist, so, daß man blos x als Hauptgröße ansiehet. Jedes Glied dieser Reihe enthält aber noch die Größe y, und diese erhält durch obige Substitution von $x + \Delta x$ statt x das Inkrement Δy. Setzt man also in jedes Glied jener Reihe für y, $y + \Delta y$, so entstehet aus $\varphi(x, y)$ die Reihe:

$$\varphi(x, y) + B \Delta y + \overset{2}{B} \Delta y^2 \ldots$$

wo jedoch nicht $B \Delta y$, sondern $B dy$ das Differential von $\varphi(x, y)$ ist, wenn man blos in Beziehung auf y differentiirt, denn y hängt von x ab.

Ferner verwandelt sich $A \Delta x$ in

$$A \Delta x + a \Delta y \Delta x + \overset{2}{a} \Delta y^2 \Delta x \ldots$$

ferner $\overset{2}{A} \Delta x^2$ in:

$$\overset{2}{A} \Delta x^2 + b \Delta y \Delta x^2 + \overset{2}{b} \Delta y^2 \Delta x^2 \ldots$$

ferner $\overset{3}{A} \Delta x^3$ in

$$\overset{3}{A} \Delta x^3 + c \Delta x^3 \Delta y + \ldots \text{ u. s. w.}$$

folglich hat man:

$$\begin{aligned} \varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) = \\ \varphi(x, y) + B \Delta y + \overset{2}{B} \Delta y^2 + \overset{3}{B} \Delta y^3 + \ldots \\ + A \Delta x + a \Delta x \Delta y + \overset{2}{a} \Delta x \Delta y^2 + \ldots \\ + \overset{2}{A} \Delta x^2 + b \Delta x^2 \Delta y + \ldots \\ + \overset{3}{A} \Delta x^3 + \ldots \end{aligned}$$

Dieses Resultat schreitet nach Potenzen von Δx und Δy zugleich fort; da aber y als Function von x angesehen werden soll, so muß sich Δy durch eine nach Potenzen von Δx fortschreitende Reihe entwickeln lassen. Man kann darauf diese Reihe für Δy in obigen Ausdruck substituiren, und wird dadurch das ganze Resultat nach Potenzen von Δx geordnet erhalten.

Von allen Gliedern des obigen Ausdrucks, welche Δy enthalten, wird sich ausschließlich $B\Delta y$ in eine Reihe entwickeln lassen, welche mit der ersten Potenz von Δx anfängt, und das erste Glied dieser Reihe ist $B\,dy$, d. h. das Differential von $\varphi(x, y)$, in Beziehung auf y.

Die beiden einzigen Glieder, welche Δx auf der ersten Potenz enthalten, sind daher $B\,dy$ und $A\,\Delta x$, d. h. das niedrigste Glied von $\varphi(x + \Delta x, y + \Delta x)$ ist:

$$\left(B\frac{dy}{\Delta x} + A\right)\Delta x$$

Da aber das ganze Resultat $= 0$ seyn soll, so muß es jedes einzelne Glied, d. h. der Coefficient jedes Gliedes seyn. Man findet daher

$$B\frac{dy}{\Delta x} + A = 0, \text{ oder } B\,dy + A\,\Delta x = 0$$

welches, wie $\varphi(x, y) = 0$ die Relation zwischen den Größen x und y selbst darstellt, die Beziehung unter den Differentialen von x und y ausdrückt. Da nun $B\,dy$ das Differential von $\varphi(x, y)$ ist, wenn man darin nur y als Hauptgröße ansiehet, hingegen $A\,\Delta x$ das Differential derselben Function bedeutet, in welcher man nur x als Hauptgröße betrachtet hat; so folgt, daß man zu der Beziehung unter den Differentialen einer verwickelten Function, welche man die Differentialgleichung nennt, gelangt, indem man den verwickelten Ausdruck zwischen y und x zuerst in Beziehung auf die eine dieser Größen, dann aber denselben auch in Beziehung auf die andere differentiirt, und die Summe beider Differentiale $= 0$ setzt.

Z. B. Man habe:

$$y^2x - yx^3 + x^4 = 0$$

so ist dieser Ausdruck in Beziehung auf x differentiirt:

$$(y^2 - 3yx^2 + 4x^3)\,\Delta x$$

in Beziehung auf y, als die abhängige Hauptgröße:

$$(2yx - x^3)\,dy$$

und folglich hat man:

$$(y^2 - 3yx^2 + 4x^3)\,\Delta x + (2yx - x^3)\,dy = 0$$

oder auch:

$$\frac{dy}{\Delta x} = -\frac{y^2 - 3yx^2 + 4x^3}{2yx - x^3}$$

Sey ferner:

$$ay^2 + bxy + cx^2 + fy + gx + h = o$$

so ist die Differentialgleichung:

$$(2ay + bx + f)dy + (by + 2cx + g)\Delta x = o$$

oder

$$\frac{dy}{\Delta x} = -\frac{by + 2cx + g}{2ay + bx + f}$$

§. 46.

Man hat hier immer darauf zu achten, welche Größe als Function der andern angesehen werden soll, um beim Differentiiren in Bezug auf sie selbst das Differential zu setzen, wo man, indem in Beziehung auf die andern differentiirt wird, die Differenz schreibt, wie dieses im Vorhergehenden hinlänglich auseinandergesetzt ist. Hat man also, wie wir bisher annahmen, in der verwickelten Function $\varphi(x, y)$, y als Function von x betrachtet, so ist die Differentialgleichung:

$$B\,dy + A\,\Delta x = o$$

Hätte man aber, wie es eben so gut gestattet ist, x als Function von y angesehen, so wäre die Differentialgleichung:

$$B\,\Delta y + A\,dx = o.$$

Um nun Differentialgleichungen höherer Ordnungen zu erzeugen, wird man die Differentiation sowohl in Bezug auf y, als auf x fortsetzen, wobei jedoch bemerkt werden muß, wenn die Differentialgleichung

$$B\,dy + A\,\Delta x = o$$

ist, daß bei der Differentiation des ersten Theils nicht $dy\,dB$, sondern $B\,d^2y + dy\,dB$ gesetzt werden müsse, indem sowohl B, als dy Function ist.

Hat man daher:

$$y^2 - 2axy + x^2 - b = o,$$

so ist, wenn y als Function von x angesehen werden soll:

$$(y - ax)dy + (x - ay)\Delta x = o$$

welches die Differentialgleichung des ersten Grades ist. Ferner hat man:

$$(y - ax)\,d^2y + dy^2 - 2a\,dy\,\Delta x + \Delta x^2 = o$$

als Differentialgleichung des zweiten Grades. So kann man fortfahren, Differentialgleichungen eines höheren Grades abzuleiten, wobei sich das Verfahren immer gleich bleibt.

Hätte man in obigem verwickelten Ausdrucke x als Function von y betrachtet, so wäre die Differentialgleichung des ersten Grades:

$$(y - ax)\,\Delta y + (x - ay)\,dx = 0$$

die des zweiten Grades aber:

$$\Delta y^2 - 2a\,dx\,\Delta y + (x - ay)\,d^2x + dx^2 = 0$$

ein von dem vorhergehenden gänzlich verschiedenes Resultat.

Von den Integrationsmethoden.

§. 47.

Wenn man aus einer Function, die mit Δx multiplicirt ist, diejenige Function sucht, durch deren Differentiation sie entstanden ist, so heißt dies die Function integriren.

Wenn $\varphi(x)\,\Delta x$ integrirt werden soll, so deutet man dies durch das Zeichen $\int$ an, welches man vor den Ausdruck setzt, so, daß also, wenn

$$d\psi(x) = \varphi(x)\,\Delta x$$

ist, man:

$$\psi(x) = \int \varphi(x)\,\Delta x$$

habe.

War in dem Ausdrucke $\psi(x)$ x selbst noch Function einer andern Hauptgröße z, so hatte man:

$$d\psi(x) = \varphi(x)\,dx$$

und

$$\psi(x) = \int \varphi(x)\,dx$$

Hieraus ist also klar, daß es beim Integriren gar keinen Unterschied verursache, ob das Differential $\varphi(x)\,\Delta x$ oder $\varphi(x)\,dx$ sey, die Regeln bleiben sich gleich, und das Resultat ist in beiden Fällen $\psi(x)$, wir brauchen also die Zeichen dx und Δx hier nicht ferner zu unterscheiden.

§. 48.

Da:

$$d\,A\,\varphi(x) = A\,d\,\varphi(x),$$

wenn A eine Nebengröße bedeutet, so ist auch

$$\int A\,d\,\varphi(x) = A\int d\,\varphi(x).$$

Da ferner, wenn

$$X = Y + Z + V + W + \ldots$$

ist,

$$dX = dY + dZ + dV + dW + \ldots$$

gefunden wird, so ist auch, wenn

$$dy = A\,\Delta x + B\,\Delta x + C\,\Delta x + \ldots$$

$$y = \int(A\,\Delta x + B\,\Delta x + C\,\Delta x + \ldots)$$

$$= \int A\,\Delta x + \int B\,\Delta x + \int C\,\Delta x + \ldots$$

1. Integration algebraischer Functionen.

§. 49.

Man hat:

$$d\,ax^m = m\,ax^{m-1}\,\Delta x,$$

folglich:

$$\int d\,ax^m = ax^m = \int m\,ax^{m-1}\,\Delta x,$$

oder

$$m\int ax^{m-1}\,\Delta x = ax^m.$$

Setzt man für m den Werth m + 1, so hat man:

$$(m+1)\int ax^m\,\Delta x = ax^{m+1},$$

und also

$$\int ax^m\,\Delta x = \frac{ax^{m+1}}{m+1}$$

§. 50.

Da bei jeder Differentiation eines Ausdrucks eine Nebengröße, welche für sich als Theil stehet, wegfällt, so muß man sich bei jeder Integration eine solche noch hinzugesetzt gedenken, welche man darauf erst aus der Natur des Gegenstandes bestimmen kann. Man nennt eine solche hinzugefügte Nebengröße eine **Constante**, und pflegt sie durch C oder Const. zu bezeichnen. Die Erforschung derselben, welche nach jeder Integration nothwendig ist, heißt die **Constantenbestimmung**.

Es ist also allgemein:

$$\int a x^m \Delta x = \frac{a x^{m+1}}{m+1} + \text{Const.}$$

Soll das Integral $\int a x^m \Delta x$ zu o werden, wenn $x = o$ ist, so hat man

$$o = o + \text{Const.}$$

woraus Const. $= o$ folgt. Soll aber das Integral zu o werden, wenn $x = g$ ist, so hat man

$$o = \frac{a g^{m+1}}{m+1} + \text{Const.}$$

daher:

$$\text{Const.} = -\frac{a g^{m+1}}{m+1}$$

und folglich:

$$\int a x^m \Delta x = \frac{a}{m+1}\left(x^{m+1} - g^{m+1}\right)$$

Auf ähnliche Art bestimmen sich die Constanten bei jedem Integral.

Da nun die Differentiationsregel:

$$d a x^m = m a x^{m-1} \Delta x$$

dieselbe bleibt, m mag eine ganze oder gebrochene, eine positive oder negative Zahl seyn, so folgt, daß dasselbe auch mit der Formel

$$\int a x^m \Delta x = \frac{a x^{m+1}}{m+1} + \text{Const.}$$

der Fall ist.

Es sey z. B. der zu integrirende Ausdruck oder die Integrande, $\int a\sqrt{x}\,\Delta x$, so ist dieses:

$$= \int a x^{\frac{1}{2}} \Delta x = \frac{a x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \text{Const.}$$

$$= \tfrac{2}{3} a x^{\frac{3}{2}} + \text{Const.} = \tfrac{2}{3} a \sqrt{x^3} + \text{Const.}$$

Ferner hat man:

$$\int \frac{a\,\Delta x}{x^m} = \int a x^{-m} \Delta x = \frac{a}{1-m} x^{1-m} + \text{Const.}$$

$$= \frac{a}{1-m} \cdot \frac{1}{x^{m-1}} + \text{Const.}$$

§. 51.

Diese Regel erleidet eine Ausnahme, wenn $m = -1$ ist, denn alsdann wäre:

$$\int \frac{a\Delta x}{x} = \frac{a x^0}{0} = \frac{a}{0}$$

Man weiß aber, daß

$$d \log nat\, x = \frac{\Delta x}{x}$$

und folglich hat man:

$$\int \frac{a\Delta x}{x} = a \log nat\, x + Const.$$

oder, wenn x noch Function einer andern Hauptgröße ist:

$$\int \frac{a\, dx}{x} = a \log nat\, x + Const.$$

z. B. Es ist:

$$\int \frac{n x^{n-1} - 1}{x^n - x} \Delta x = \log nat\, (x^n - x) + Const.$$

§. 52.

Man kann der Formel:

$$\int a x^m = \frac{a x^{m+1}}{m+1} + Const.$$

noch eine etwas allgemeinere Gestalt geben. Es ist nämlich:

$$d(a + bx)^n = n(a + bx)^{n-1} b \Delta x$$

folglich:

$$\int n(a + bx)^{n-1} b \Delta x = n b \int (a + bx)^{n-1} \Delta x = (a + bx)^n$$

also

$$\int (a + bx)^{n-1} \Delta x = \frac{(a + bx)^n}{n b}$$

oder für n den Werth $n + 1$ gesetzt:

$$\int (a + bx)^n \Delta x = \frac{(a + bx)^{n+1}}{b(n+1)}$$

z. B. Es ist:

$$\int \frac{c\Delta x}{\sqrt{(a+bx)^3}} = c\int (a + bx)^{-\frac{3}{2}} \Delta x$$

$$= \frac{c(a + bx)^{-\frac{3}{2}+1}}{(1 - \frac{3}{2})b}$$

$$= -\frac{2c}{b\sqrt{(a+bx)}}$$

Ferner hat man:

$$\int \frac{c\,\Delta x}{(a+bx)^4} = c \int (a+bx)^{-4}\,\Delta x$$
$$= \frac{c.(a+bx)^{1-4}}{b\,(1-4)} = -\frac{c}{3\,b\,(a+bx)^3}$$

§. 53.

Auch hier ist für $n = -1$ ein Ausnahmefall, man hat:

$$\int \frac{a\,\Delta x}{(a+bx)} = \frac{a \log \operatorname{nat} (a+bx)}{b}$$

§. 54.

Da:

$$d\,(a+bx^m)^n = n\,(a+bx^m)^{n-1}\,m\,b\,x^{m-1}\,\Delta x$$

so hat man:

$$\int n\,(a+bx^m)^{n-1}\,m\,b\,x^{m-1}\,\Delta x = n\,m\,b \int x^{m-1}\,(a+bx^m)^{n-1}\,\Delta x$$
$$= (a+bx^m)^n$$

also

$$\int x^{m-1}\,(a+bx^m)^{n-1}\,\Delta x = \frac{1}{n\,m\,b}\,(a+bx^m)^n$$

oder, für n den Werth $n+1$ gesetzt:

$$\int x^{m-1}\,(a+bx^m)^n\,\Delta x = \frac{(a+bx^m)^{n+1}}{m\,b\,(n+1)}$$

§. 55.

Für $n = -1$ hat man auch hier:

$$\int \frac{x^{m-1}\,\Delta x}{a+bx^m} = \frac{\log \operatorname{nat} (a+bx^m)}{m\,b}$$

§. 56.

Da man durch Differentiation findet:

$$d\,\text{Arc. Sin}\,x = \frac{\Delta x}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

so ist:

$$\int \frac{\Delta x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \text{Arc. Sin}\,x$$

oder, wenn x noch Function ist:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \text{Arc. Sin}\,x$$

z. B. Es ist:

$$\int \frac{\Delta x}{\sqrt{(a+bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{\Delta x}{\sqrt{(1+\frac{b}{a}x^2)}}$$

Sey nun: $\sqrt{(-\frac{b}{a})}.\ x = z$, also $\Delta x = \frac{\Delta z}{\sqrt{(-\frac{b}{a})}}$, und das Integral:

$$= \frac{1}{\sqrt{a}.\sqrt{-\frac{b}{a}}} \int \frac{\Delta z}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{1}{\sqrt{-b}} \text{Arc. Sin } z$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-b}} \text{Arc. Sin } x\sqrt{-\frac{b}{a}}$$

§. 57.

Eben so hat man

$$\int \frac{-\Delta x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \text{Arc. Cos } x$$

welches bis auf das Zeichen mit Arc. Sin x übereinstimmen würde, wenn hier nicht die zu bestimmende Constante das Erfoderliche ergänzte.

§. 58.

Ferner hat man durch ursprüngliche Betrachtung:

$$\int \frac{\Delta x}{1+x^2} = \text{Arc. Tang } x$$

welchen Werth auch $\int \frac{dx}{1+x^2}$ hat, wo x noch Function einer andern Hauptgröße ist.

Man hat z. B.

$$\int \frac{\Delta x}{a+bx^2} = \frac{1}{a} \int \frac{\Delta x}{1+\frac{b}{a}x^2}$$

Sey

$$\sqrt{\frac{b}{a}}.\ x = z, \text{ also } \frac{b}{a} x^2 = z^2,$$

so ist

$$\Delta x = \sqrt{\frac{a}{b}}\ \Delta z,$$

folglich das Integral:

$$= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a}{b}} \int \frac{\Delta z}{1+z^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{Arc. Tang } z$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{Arc. Tang } x\sqrt{\frac{b}{a}}$$

Integration rationaler gebrochener Functionen.

§. 59.

Aus der Analysis ist bekannt, daß man jede echt gebrochene Function von x, d. h. eine solche, wo die Hauptgröße im Nenner auf einer höheren Potenz vorkömmt, als im Zähler, in Partialbrüche zerlegen könne, welche gewisse Nebengrößen zu ihren Zählern und diejenigen Formen des ersten Grades, woraus der Nenner der gegebenen gebrochenen Function durch Multiplication zusammengesetzt ist, zu ihren Nennern haben. Hat man daher die gebrochene Function:

$$\frac{ax+b}{(x-c)(x+f)(x-g)}$$

so läßt sich diese in drei Brüche von der Form $\frac{A}{x-c}$, $\frac{B}{x+f}$, $\frac{C}{x-g}$ zerlegen, wo A, B, C Nebengrößen bedeuten, welche man aus der Function selbst ableiten kann. Nachdem diese bestimmt sind, hat man:

$$\frac{ax+b}{(x-c)(x+f)(x-g)} = \frac{A}{x-c} + \frac{B}{x+f} + \frac{C}{x-g}$$

Ist die Function nicht ächt gebrochen, d. h. ist der Exponent der höchsten Potenz von x im Zähler nicht kleiner, als der der höchsten Potenz von x im Nenner, so kann man diesen Bruch durch Division darauf zurückbringen, wie bekannt ist.

§. 60.

Man habe die echt gebrochene Function:

$$\frac{P}{Q(a+bx)}$$

wobei P und Q Functionen von x sind, und angenommen wird, Q enthalte den Factor a + bx nicht mehr, so setze man.

$$\frac{P}{Q(a+bx)} = \frac{A}{a+bx} + \frac{R}{Q}$$

wo $\frac{R}{Q}$ irgend eine Function bedeutet, so ist:

$$\frac{P}{Q} = A + \frac{R}{Q}(a+bx).$$

Setzt man jetzt $a+bx=0$, d. h. $x=-\frac{a}{b}$, so hat man

$$\frac{P}{Q} = A$$

d. h. A ist so groß, als die vorgegebene Function $\frac{P}{Q(a+bx)}$, aus welcher man den Factor $a+bx$ im Nenner hinausgeworfen, und in den übrig gebliebenen Bruch $\frac{P}{Q}$ für x den Werth $-\frac{a}{b}$ gesetzt hat.

Auf diese Weise kann man den Zähler eines jeden Partialbruches finden, wobei jedoch noch folgende Abkürzung Statt finden kann.

§. 61.

Hat man den Bruch $\frac{P}{S}$, wo S den Factor $a+bx$ enthalte, und will man diesen Factor obiger Regel gemäß aus dem Nenner fortschaffen, um darauf für x den Werth $-\frac{a}{b}$ in den übrigen Bruch zu substituiren; so kann man dieses durch $\frac{P}{\frac{S}{a+bx}}$ andeuten. Setzt man aber darauf $a+bx = o$, so erhält das Resultat die Gestalt: $\frac{P}{\frac{o}{o}}$

In einem solchen Falle, wo eine Function von x, welche diese Hauptgröße im Zähler und Nenner enthält, für einen gewissen Werth h von x zu $\frac{o}{o}$ wird, darf man für den Zähler sein Differential, deßgleichen auch für den Nenner das Differential desselben setzen, um darauf jene Substitution vorzunehmen. Denn es sey dieser Bruch:

$$s = \frac{q}{r},$$

welcher für $x = h$ zu $\frac{o}{o}$ wird, so ist:

$$q = rs \text{ und}$$
$$dq = r\,ds + s\,dr$$

Da nun für $x = h$ sowohl r, als q zu o werden, so ist:

$$dq = s\,dr \text{ oder}$$
$$s = \frac{dq}{dr}$$

Wird auch dieses noch $\frac{o}{o}$ für $x = h$, so setze man diese Regel ferner in Anwendung, und man erhält:

$$s = \frac{d^2q}{d^2r} \text{ u. s. w.}$$

Daher wird obiger Bruch $\frac{\frac{P}{S}}{a+bx}$, welcher für $x = -\frac{a}{b}$ zu $\frac{\frac{P}{o}}{o}$ wird,

$$= \frac{\frac{P}{dS}}{b\Delta x} = \frac{Pb\Delta x}{dS}$$

welcher Ausdruck für $x = -\frac{a}{b}$ dem Zähler des Partialbruchs gleich seyn wird, dessen Nenner $a + bx$ ist.

Z. B. Man habe:

$$\frac{x^2-3x+4}{(1-x)(1+x)(1-2x)}$$

so wird sich diese Function in drei Partialbrüche zerlegen, welche sind:

$$\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{1-2x}$$

Um den Zähler A zu erhalten, setze man in $\frac{x^2-3x+4}{(1+x)(1-2x)}$ für x den Werth 1, wodurch derselbe $= \frac{2}{-2} = -1$ wird.

Ferner ist $B = \frac{1+3+4}{2.3} = \frac{4}{3}$

endlich $C = \frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+4}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}} = \frac{11}{3}$

Folglich ist:

$$\frac{x^2-3x+4}{(1-x)(1+x)(1-2x)} = -\frac{1}{1-x} + \frac{4}{3}\,\frac{1}{1+x} + \frac{11}{3}\,\frac{1}{1-2x}$$

Man habe ferner den Bruch: $\frac{1+5x}{1-x^{12}}$ zu zerlegen, so weiß man, daß in dem Nenner $1-x^{12}$ der Factor $1-x$ enthalten ist. Dividirt man damit, so erhält man:

$$\frac{1+5x}{1-x^{12}} = \frac{1+5x}{(1-x)(1+x+x^2..+x^{11})}$$

Um den Zähler zu $1-x$ zu finden, setze man in $\frac{1+5x}{1+x+x^2..+x^{11}}$ für x den Werth 1, wodurch man erhält $\frac{1+5}{12} = \frac{1}{2}$.

Ohne die Division vorzunehmen, kann man sogleich setzen:

$\frac{1+5x}{\frac{d(1-x^{12})}{d(1-x)}} = \frac{1+5x}{12x^{11}}$, welches für $x = 1$ den Werth $\frac{1}{2}$

giebt. Die übrigen Factoren erhalten die Form $a + b\sqrt{-1}$, wovon weiter unten die Rede seyn wird.

§. 62.

Bis jetzt ist immer noch vorausgesetzt worden, die gebrochene Function enthalte den Factor $a + bx$ nur einmal im Nenner, sie kann aber auch die Form haben, daß eine Potenz von $a + bx$ im Nenner vorkömmt.

Setzt man allgemein die gebrochene Function

$$\frac{M}{Q(a+bx)^n},$$

wo M und Q gewisse Functionen von x bedeuten; so ist die Zerlegung nach folgender Form jedesmal möglich:

$$\frac{M}{Q(a+bx)^n} = \frac{A}{(a+bx)^n} + \frac{\overset{1}{A}}{(a+bx)^{n-1}} \ldots$$

$$+ \frac{\overset{r}{A}}{(a+bx)^{n-r}} \ldots + \frac{\overset{n-1}{A}}{a+bx} + \frac{P}{Q}.$$

Multiplicirt man mit $(a + bx)^n$, so ist:

$$\frac{M}{Q} = A + \overset{1}{A}(a+bx) \ldots + \overset{r}{A}(a+bx)^r \ldots + \overset{n-1}{A}(a+bx)^{n-1}$$
$$+ \frac{P}{Q}(a+bx)^n$$

setzt man überall in dieser Gleichung für x den Werth $-\frac{a}{b}$ an die Stelle, so verschwinden alle Glieder, welche den Factor $a + bx$ enthalten, und $\frac{M}{Q}$ verwandelt sich in eine bestimmte Zahl, welche alsdann den Werth von A darstellt.

Um $\overset{1}{A}$ zu bekommen, differentiire man den Ausdruck für $\frac{M}{Q}$ und dividire durch $d(a + bx)$ so erhält man:

$$\frac{d\frac{M}{Q}}{d(a+bx)} = \overset{1}{A} + 2\overset{2}{A}(a+bx) \ldots + r\overset{r}{A}(a+bx)^{r-1} \ldots$$

$$\ldots + (n-1)\overset{n-1}{A}(a+bx)^{n-2} + \frac{d\left[\frac{P}{Q}(a+bx)^n\right]}{d(a+bx)}$$

Setzt man jetzt $a + bx = 0$ also für x den Werth $-\frac{a}{b}$, so hat man:

$$\overset{1}{A} = \frac{d\,\frac{M}{Q}}{d(a+bx)}$$

in welchen Ausdruck für x der Werth $-\frac{a}{b}$ gesetzt ist.

So erhält man also allgemein:

$$\overset{r}{A} = \frac{d^r\frac{M}{Q}}{1.2\ldots r\,d(a+bx)^r}$$

in welchen Ausdruck man sich wieder für x den Werth $-\frac{a}{b}$ gesetzt gedenkt, wodurch er in eine Nebengröße übergehet.

Die Regel, nach welcher man die Zähler der successiven Brüche findet, lautet daher so: man werfe aus dem anfänglichen Bruche $\frac{M}{Q(a+bx)^n}$ den Factor $(a + bx)^n$ im Nenner weg, substituirt in den übrig gebliebenen Bruch $\frac{M}{Q}$ für x den Werth $-\frac{a}{b}$, so erhält man dadurch den Zähler zu $(a+bx)^n$. Man differentiire den Bruch $\frac{M}{Q}$, dividire ihn darauf durch $d(a+bx)$ und setze dann für x jenen Werth, so erhält man den Zähler zu $(a+bx)^{n-1}$ u. s. w. Allgemein, man differentiire den Bruch $\frac{M}{Q}$ r mal, dividire dieses Differential durch $1.2\ldots r$ und $d(a+bx)^r$ und substituire endlich für x den Werth $-\frac{a}{b}$, so erhält man dadurch den Zähler zu $(a+bx)^{n-r}$.

Hat man z. B. den Bruch:

$$\frac{1+2x^3+3x^4}{(2-x^5)}$$

so zerlegt sich dieser in fünf Partialbrüche, deren Nenner die Formen $(2-x)^5$, $(2-x)^4$, $(2-x)^3$, $(2-x)^2$, $(2-x)$ sind. Der Zähler zu $(2-x)^5$ entstehet, wenn man in $1+2x^3+3x^4$ für x den Werth 2 setzt, also ist derselbe $= 1 + 16 + 48 = 65$: Der Zähler zu $(2-x)^4$ entstehet, wenn man in $\frac{d(1+2x^3+3x^4)}{-\Delta x} = -6x^2 - 12x^3$ für x den Werth 2 setzt, wodurch man erhält $- 24 - 96$

$= - 120$. Ferner ist der Zähler zu $(2-x)^3$, $= 84$, der Zähler zu $(2-x)^2$ ist $= - 26$, der zu $(2-x)$ endlich ist $= 3$, folglich hat man:

$$\frac{1+2x^3+3x^5}{(2-x)^5} =$$

$$\frac{65}{(2-x)^5} - \frac{120}{(2-x)^4} + \frac{84}{(2-x)^3} - \frac{26}{(2-x)^2} + \frac{3}{2-x}$$

Hier war die Differentiation sehr leicht; wäre aber außer $(2-x)^5$ noch ein anderer Factor im Nenner gewesen, so käme es auf die Bildung höherer Differentiale eines Quotienten an, welche ziemlich weitläufig ausfallen wird, wofür man aber bald eine allgemeine Formel ableiten kann.

§. 63.

Nach diesen Prämissen aus der Theorie der Brüche, kehren wir wieder zur Integration selbst zurück.

Jede echt gebrochene Function zerlegt sich in Partialbrüche, welche entweder von der Form $\frac{A}{a+bx}$ oder von der Form $\frac{B}{(a+bx)^n}$ sind. Beide mit Δx oder dx multiplicirt können integrirt werden, und es ist:

$$\int \frac{A\Delta x}{a+bx} = \frac{A \log \text{nat} (a+bx)}{b}$$

$$\int \frac{B\Delta x}{(a+bx)^n} = \frac{B}{b(1-n)(a+bx)^{n-1}}$$

Hat man daher irgend eine echt gebrochene Function, wie:

$$\frac{(\overset{1}{A} x^{n-1} + \overset{2}{A} x^{n-2} \,..\, \overset{r}{A} x^{n-r} \,..\, \overset{n}{A})\,\Delta x}{(a+bx)(c+gx)\ \dots\ (n+qx)}$$

wo die Factoren im Nenner n sind, so ist diese $=$

$$\frac{\overset{1}{B}\Delta x}{a+bx} + \frac{\overset{2}{B}\Delta x}{c+gx} \dots + \frac{\overset{n}{B}\Delta x}{n+qx}$$

wo man jeden einzelnen Theil integriren kann, indem man einen Logarithmen erhält, und sich die Coefficienten nach bekannten Regeln ableiten lassen.

Man habe z. B. die Function:

$$\frac{(x^2+bx)\Delta x}{x(x-1)(x-2)(x+1)}$$

zu integriren, so ist dieselbe nach der Zerlegung:

$$\frac{0\,\Delta x}{x} - \frac{(1+b)\,\Delta x}{2(x-1)} - \frac{(1-b)\,\Delta x}{6(x+1)} + \frac{(2+b)\,\Delta x}{3(x-2)}$$

folglich das Integral:

$$= -\frac{1+b}{2}\log(x-1) - \frac{1-b}{6}\log(x+1) + \frac{2+b}{3}\log(x-2)$$

Daß man hier für den Zähler zu x den Werth 0 findet, rührt daher, daß x auch im Zähler des vorgegebenen Bruches enthalten ist. Man könnte da sogleich Zähler und Nenner durch x dividiren und den Bruch so schreiben:

$$\frac{(x+b)\,\Delta x}{(x-1)(x+1)(x-2)},$$

woraus dieselben Partialbrüche entstehen.

Das ganze Verfahren ist leicht, und die Schwierigkeiten welche sich hier zeigen könnten, würden nur von der Zerlegung herrühren, da diese die Auflösung der Gleichungen voraussetzt.

§. 64.

Wenn man den Nenner einer gebrochenen Function in Factoren des ersten Grades zerlegt, so wird man oft auf Factoren von der Form $x-(a+b\sqrt{-1})$ kommen. Die Integration der dadurch entstehenden Partialbrüche hat keine Schwierigkeit, denn man hat:

$$\int\frac{A\,\Delta x}{x-(a+b\sqrt{-1})} = A.\log\text{nat}\,[x-(a+b\sqrt{-1})] + \text{Const.}$$

Allein es ist alsdann noch übrig, diese Formen reell zu machen, d. h. aus ihnen das $\sqrt{-1}$ fortzuschaffen, wovon wir sogleich das Nähere betrachten werden.

Es zerlegt sich der Bruch $\frac{1}{1+x^2}$ in zwei Partialbrüche, deren Nenner $x+\sqrt{-1}$ und $x-\sqrt{-1}$ sind, oder auch die Form $1-x\sqrt{-1}$ und $1+x\sqrt{-1}$ haben können.

Man hat also zuerst

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{A}{x+\sqrt{-1}} + \frac{B}{x-\sqrt{-1}}$$

wobei $A = -\frac{1}{2\sqrt{-1}}$ und $B = \frac{1}{2\sqrt{-1}}$ gefunden wird. Ferner hat man:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{A}{1-x\sqrt{-1}} + \frac{B}{1+x\sqrt{-1}}.$$

wo man $A = \frac{1}{2}$ und $B = \frac{1}{2}$ findet.

Daher ist:

$$\int\frac{\Delta x}{1+x^2} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\int\frac{\Delta x}{x-\sqrt{-1}} - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\int\frac{\Delta x}{x+\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log(x-\sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log(x+\sqrt{-1})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{x-\sqrt{-1}}{x+\sqrt{-1}}.$$

Ferner hat man:

$$\int\frac{\Delta x}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\int\frac{\Delta x}{1-x\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{2}\int\frac{\Delta x}{1+x\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\log(1-x\sqrt{-1})}{-\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}\frac{\log(1+x\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}$$

Nun ist aber auch

$$\int\frac{\Delta x}{1+x^2} = \text{Arc Tang } x$$

folglich hat man:

$$\text{Arc Tang}\, x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{x-\sqrt{-1}}{x+\sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}$$

wodurch der Kreisbogen in geschlossener, aber Unmögliches involvirender Form dargestellt ist.

Oben fanden wir:

$$\int\frac{\Delta x}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\text{Arc Tang}\, x.\sqrt{\frac{b}{a}}$$

Nun ist aber:

$$\text{Arc Tang}\, x\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{x\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{-1}}{x\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{x\sqrt{b}-\sqrt{-a}}{x\sqrt{b}+\sqrt{-a}}$$

Ferner ist auch:

$$\text{Arc Tang}\, x\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1+x\sqrt{-\frac{b}{a}}}{1-x\sqrt{-\frac{b}{a}}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{\sqrt{a}+x\sqrt{-b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{-b}}$$

Also hat man:

$$\int\frac{\Delta x}{a+b^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\text{Arc Tang}\, x.\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \log \frac{x\sqrt{b}-\sqrt{-a}}{x\sqrt{b}+\sqrt{-a}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \log \frac{\sqrt{a}+x\sqrt{-b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{-b}}.$$

§. 65.

Entstehet bei der Zerlegung ein Bruch mit dem Nenner $x-(x+b\sqrt{-1})$, so ist auch ein ähnlicher von der Form $x-(a-b\sqrt{-1})$ jedesmal vorhanden. Hat man den Zähler zu $x-(a+b\sqrt{-1})$, $+A+B\sqrt{-1}$ gefunden, welche Form er haben muß, indem man, um ihn zu erhalten, für x den Werth $a+b\sqrt{-1}$ substituirt hat; so muß der Zähler zu $x-(a-b\sqrt{-1})$, $A-B\sqrt{-1}$ seyn, denn man hatte zur Erzeugung desselben die nämliche Substitution in dieselbe Größe vorgenommen, und nur $\sqrt{-1}$ negativ angenommen. Findet man also bei der Zerlegung den Partialbruch:

$$\frac{A+B\sqrt{-1}}{x-(a+b\sqrt{-1})},$$

so ist man berechtigt, auch einen ähnlichen von der Form:

$$\frac{A-B\sqrt{-1}}{x-(a-b\sqrt{-1})} \text{ zu setzen.}$$

Integrirt man beide, so hat man:

$$\int\frac{(A+B\sqrt{-1})\Delta x}{x-(a+b\sqrt{-1})} + \int\frac{(A-B\sqrt{-1})\Delta x}{x-(a-b\sqrt{-1})}$$

$$=(A+B\sqrt{-1})\log[x-(a+b\sqrt{-1})]+(A-B\sqrt{-1})\log[x-(a-b\sqrt{-1})]$$

$$=A[\log(x-(a+b\sqrt{-1}))+\log(x-(a-b\sqrt{-1})] + B\sqrt{-1}[\log(x-(a+b\sqrt{-1}))-\log(x-(a-b\sqrt{-})]$$

$$=A\log(x-(a+b\sqrt{-1}))(x-(a-b\sqrt{-1})) + B\sqrt{-1}\log\frac{x-(a+b\sqrt{-1})}{x-(a-b\sqrt{-1})}$$

$$=A.\log[(x-a)^2+b^2)+B\sqrt{-1}\log\frac{\frac{x-a}{b}-\sqrt{-1}}{\frac{x-a}{b}+\sqrt{-1}}$$

$$=A\log[(x-a)^2+b^2)+2B\sqrt{-1}\sqrt{-1}\,\text{Arc. Tang}\,\frac{x-a}{b}$$

$$=A\log[(x-a)^2+b^2)-2B\,\text{Arc Tang}\,\frac{x-a}{b}$$

Findet man zwei Partialbrüche dieser Art, so ist nöthig, daß man ihnen vor der Integration genau obige Gestalt gebe. Wir haben die Entwickelung bei der Annahme gemacht, daß der Zähler zu $x-(a+b\sqrt{-1})$, $A+B\sqrt{-1}$ sey, in welchem Falle der Zähler zu $x-(a-b\sqrt{-1})$ die Gestalt $A-B\sqrt{-1}$ haben muß. Es kann sich jedoch bei wirklichen Rechnungen eben so gut finden, daß der Zähler zu $x-(a+b\sqrt{-1})$, $A-B\sqrt{-1}$, also der zu $x-(a-b\sqrt{-1})$, $A+B\sqrt{-1}$ werde.

Denn man hat:

$$\int\frac{(A-B\sqrt{-1})\Delta x}{x-(a+b\sqrt{-1})} + \int\frac{(A+B\sqrt{-1})\Delta x}{x-(a-b\sqrt{-1})}$$

dieses ist aber =

$$\int\frac{[A+(-B)\sqrt{-1}]\Delta x}{x-(a+b\sqrt{-1})} + \int\frac{[A-(-B)\sqrt{-1})\Delta x}{x-(a-b\sqrt{-1})}$$

welches mit obigem Ausdrucke einerlei Form hat, indem hier blos B negativ angenommen ist, man findet dieses daher

$$= A\log[(x-a)^2+b^2] + 2B\,\mathrm{Arc\,Tang}\,\frac{x-a}{b}$$

Sind z. B. die beiden zu integrirenden Theile:

$$\int\frac{(3+\sqrt{-1})\Delta x}{x-2\sqrt{-1}} + \int\frac{(3-\sqrt{-1})\Delta x}{x+2\sqrt{-1}}$$

so ist hier $A=3$, $B=1$, $a=0$, $b=2$, also das Integral:

$$= 3\log(x^2+4) - 2\,\mathrm{Arc\,Tang}\,\frac{x}{2}$$

Ferner ist:

$$\int\frac{(2+3\sqrt{-1})\Delta x}{x+3-2\sqrt{-1}} + \int\frac{(2-3\sqrt{-1})\Delta x}{x+3+2\sqrt{-1}}$$
$$= 2\log[(x+3)^2+4] - 6\,\mathrm{Arc\,Tang}\,\frac{x+3}{2}$$

Ferner:

$$\int\frac{(3+\sqrt{-1})\Delta x}{x-\sqrt{-1}} + \int\frac{(3-\sqrt{-1})\Delta x}{x+\sqrt{-1}}$$
$$= 3\log(x^2+1) - 2\,\mathrm{Arc\,Tang}\,x$$

Ferner hat man:

$$\int\frac{(\sqrt{-1})\Delta x}{x-\sqrt{-1}} + \int\frac{(-\sqrt{-1})\Delta x}{x+\sqrt{-1}} = -2\,\mathrm{Arc\,Tang}\,x$$

Ferner:

$$\int\frac{(2+\sqrt{-1})\Delta x}{x+1+3\sqrt{-1}} + \int\frac{(2-\sqrt{-1})\Delta x}{x+1-3\sqrt{-1}}$$
$$= 2\log[(x+1)^2+9] + 2\,\mathrm{Arc\,Tang}\,\frac{x+1}{3}$$

Zu der allgemeinen Formel, welche wir so eben ableiteten, kommt man auch folgendermaßen: Man zerlegt den Factor des Nenners des ursprünglichen Bruches, aus welchem die beiden Factoren $x-(a+b\sqrt{-1})$ und $x-(a-b\sqrt{-1})$ entstanden, nicht, sondern läßt ihm die Form $(x-a)^2+b^2$, und sucht den Zähler dazu, welcher eine Form des ersten Grades seyn wird. Ist dieser $= \alpha+\beta x$, so hat man das Integral

$$\int\frac{(\alpha+\beta x)\Delta x}{(x-a)^2+b^2}$$

zu finden. Es sey $x-a=u$, so ist $x=u+a$ und $\Delta x=\Delta u$, also das Integral:

$$\int\frac{(\alpha+\beta a+\beta u)\Delta u}{b^2+u^2}=\int\frac{(\alpha+\beta a)\Delta x}{b^2+u^2}+\int\frac{\beta u\Delta u}{b^2+u^2}$$

$$=\frac{\alpha+\beta a}{b}\text{Arc Tang}\frac{u}{b}+\frac{\beta}{2}\log\text{nat}(b^2+u^2)$$

Substituirt man jetzt für u wieder den Werth $x-a$, so hat man das Integral:

$$\frac{\alpha+\beta a}{b}\text{Arc Tang}\frac{x-a}{b}+\frac{\beta}{2}\log\text{nat}[(x-a)^2+b^2]$$

§. 66.

Hiemit ist also die Integration gebrochener Functionen, deren Nenner sich in lauter verschiedene Factoren des ersten Grades zertheilen lassen, hinlänglich gezeigt worden. Ist der Exponent der höchsten Potenz von x im Zähler größer, als der der höchsten Potenz im Nenner, so wird man die angezeigte Division wirklich vollführen, und sie so lange fortsetzen, bis man zum Reste eine gebrochene Function von der erfoderlichen Gestalt erhält.

Z. B. Es sey das Differential $\frac{x^m\Delta x}{a+bx}$ zu integriren, wo m eine ganze positive Zahl bedeute. Durch Division findet man:

$$\frac{x^m}{a+bx}=\overset{1}{A}x^{m-1}+\overset{2}{A}x^{m-2}\ldots+\overset{h}{A}x^{m-h}\ldots$$

wo allgemein:

$$\overset{h}{A}=(-1)^{h-1}\frac{a^{h-1}}{b^h}$$

ist. Treibt man aber die Division bis zum hten Gliede des Quotienten, so ist der Rest:

$$(-1)^h\frac{a^h\,x^{m-h}}{b^h\,(a+bx)}$$

und setzt man $h=m$, so ist:

$$\frac{x^m}{a+bx}=\frac{1}{b}x^{m-1}-\frac{a}{b^2}x^{m-2}\ldots(-1)^{h-1}\frac{a^{h-1}}{b^h}x^{m-h}$$

$$\ldots(-1)^{m-1}\frac{a^{m-1}}{b^m}+(-1)^m\frac{a^m}{b^m(a+bx)}$$

also;

$$\int \frac{x^m \, \Delta x}{a + bx} = \frac{1}{mb} x^m - \frac{a}{(m-1)b^2} x^{m-1}$$

$$\ldots (-1)^{h-1} \frac{a^{h-1}}{[m-(h-1)]\, b^h} x^{m-(h-1)}$$

$$\ldots (-1)^{m-1} \frac{a^{m-1}}{b^m} x + (-1)^n \frac{a^m}{b^{m+1}} \log (a + bx)$$

Da das letzte Glied auf die Form $\frac{\Delta x}{a+bx}$ zurückkömmt, so bedarf es in diesem Falle keiner Zerlegung. Es ist nach dieser Formel z. B.

$$\int \frac{x^8 \Delta x}{a + bx} = \frac{1}{8b} x^8 - \frac{a}{7b^2} x^7 + \frac{a^2}{6b^3} x^6 - \frac{a^3}{5b^4} x^5$$

$$+ \frac{a^4}{4b^5} x^4 - \frac{a^5}{3b^6} x^3 + \frac{a^6}{2b^7} x^2 - \frac{a^7}{b^8} x + \frac{a^8}{b^9} \log(a + bx)$$

§. 67.

Zerlegt sich der Nenner des gegebenen Bruches in Factoren des ersten Grades, wovon jedoch einer oder einige mehrmal vorkommen, so wird die Integration allgemein auf:

$$\int \frac{A \, \Delta x}{(a + bx)^n} = \frac{A}{b(1 - n)(a + bx)^{n-1}}$$

zurückkommen. Hat man das Differential

$$\frac{Q \, \Delta x}{P.(a + bx)^n},$$

so ist dasselbe nach dem Vorhergehenden =

$$\frac{A \, \Delta x}{(a+bx)^n} + \frac{\overset{1}{A} \, \Delta x}{(a + bx)^{n-1}} \ldots + \frac{\overset{h}{A} \, \Delta x}{(a + bx)^{n-h}} \ldots + \frac{\overset{n-1}{A} \, \Delta x}{a + bx} + \frac{R}{P}$$

Das .R braucht man hier nicht näher zu bestimmen, sondern nur die Nebengrößen, welche als Zähler zu den Nennern gehören, in welche sich P zerlegt.

Um $\overset{h}{A}$ zu erhalten, differentiirt man $\frac{Q}{P}$ h mal hintereinander, dividirt dieses durch 1. 2.. h und $[d(a + bx)]^h$, und setzt darauf für x den Werth $-\frac{a}{b}$.

Die Factoren, worin sich P ferner zerlegt, mögen nun alle von einander verschieden seyn, oder es mögen darunter auch noch gleiche vorkommen, die Regeln zur Bildung der Partialbrüche bleiben immer dieselben. Bestehet P aus $G.(k + gx)$, und ist $k + gx$ in G nicht mehr enthalten, so ist der Zähler zu $k + gx$, $= \frac{Q}{G(a+bx)^n}$, in welchen Ausdruck man jedoch für x den Werth $-\frac{k}{g}$ substituirt hat. Bestehet P aus $K(m + fx)^b$, so ist allgemein der Zähler zu $(m + fx)^{b-h}$ gefunden, indem man $\frac{Q}{K(a+ax)^n}$ h mal differentiirt, mit 1. 2.. h und $[d(m + fx)]^h$ dividirt, und dann für x den Werth $-\frac{m}{f}$ setzt u. s. w.

§. 68.

Das Integral einer Function von der Form $\frac{x^m \Delta x}{(a + bx)^n}$ wird oft gefodert, und es ist daher nicht überflüssig, die nöthigen Formeln dazu zu entwickeln.

Ist m kleiner, als n, so kann die Integration sogleich durch die Zerlegung vollführt werden, im entgegengesetzten Falle müßte man $a + bx$ wirklich zur nten Potenz erheben, x^m dadurch dividiren, bis man einen Rest erhält, welcher eine echt gebrochene Function ist; allein man siehet sogleich die Unbequemlichkeit dieses Verfahrens. Man kann sich hier übrigens eines einfacheren Mittels bedienen.

Es ist leicht einzusehen, daß man habe:

$$\int \frac{x^m \Delta x}{(a + bx)^n} = \frac{1}{[m-(n-1)]b} \cdot \frac{x^m}{(a + bx)^{n-1}} - \frac{ma}{[m-(n-1)]b} \int \frac{x^{m-1} \Delta x}{(a + bx)^n}$$

Durch diese Formel ist die Integration von $\frac{x^m \Delta x}{(a + bx)^n}$ auf die von $\frac{x^{m-1} \Delta x}{(a + bx)^n}$ zurückgebracht. Durch dasselbe Verfahren kann diese Integration auf die von $\frac{x^{m-2} \Delta x}{(a + bx)^n}$

reducirt werden, u. s. f. Formeln dieser Art werden **Reductionsformeln** genannt, und drücken weiter nichts, als ein recurrirendes Verfahren aus. Um dieselbe Reduction auch mit $\int\frac{x^{m-1}\Delta x}{(a+bx)^n}$ vorzunehmen, braucht man nur in obige Formel statt m den Werth $m-1$ zu setzen, wodurch man zum zweiten Theile $\frac{(m-1)a}{[(m-1)-(n-1)]b}\int\frac{x^{m-2}\Delta x}{(a+bx)^n}$ bekömmt u. s. f. Allgemein nach h Reductionen wird man zum zweiten Theile den Ausdruck:

$$\frac{[m-(h-1)]a}{[m-(h-1)-(n-1)]b}\cdot\int\frac{x^{m-h}\Delta x}{(a+bx)^n}$$

bekommen. Hier wird sowohl der Zähler, als der Nenner des Bruches, womit der bei jeder Reduction übrig bleibende zweite Theil multiplicirt ist, jedesmal vermindert, es kommt also darauf an, ob der Zähler oder der Nenner zuerst zu 0 wird. Im ersten Falle wird die Integration schon durch die Reduction vollzogen, im zweiten Falle darf man nur so weit mit dem Reduciren fortfahren, bis $[(m-(h-1))-(n-1)]b = b$ ist; denn ist $m-(h-1)]-(n-1) = 0$ oder $m-(h-1) = (n-1)$ d. h. $m-(n-2) = h$, so ist der Zähler $a[m-(m-(n-1))] = (n-1)a$ d. h. wenn der Nenner schon zu 0 wird, ist der Zähler noch reell, man muß daher $m-(h-1)-(n-1) = 1$ setzen, woraus folgt, daß $m-h-(n-1) = 0$ oder $h = m-(n-1)$ d. h. die letzte mögliche Reduction bringt zum zweiten Theile:

$$\frac{(n-1)a}{b}\int\frac{x^{n-1}\Delta x}{(a+bx)^n}$$

welches eine echt gebrochene Function ist, und also leicht integrirt werden kann.

Man hat daher nach der zweiten Reduction:

$$\int\frac{x^m\Delta x}{(a+bx)^n} = \frac{1}{[m-(n-1)]b}\,\frac{x^m}{(a+bx)^{n-1}}$$

$$-\frac{1}{[(m-1)-(n-1)]b}\,\frac{ma}{[m-(n-1)]b}\,\frac{x^{m-1}}{(a+bx)^{n-1}}$$

$$+\frac{ma}{[m-(n-1)]b}\cdot\frac{(m-1)a}{[(m-1)-(n-1)]b}\int\frac{x^{m-2}\Delta x}{(a+bx)^n}$$

Man gelangt allgemein nach h Reductionen auf:

$$(-1)^h \frac{ma}{[m-(n-1)]b} \cdot \frac{(m-1)a}{[(m-1)-(n-1)]b} \cdots \frac{[m-(h-1)]a}{[(m-(h-1)-(n-1)]b} \cdot \frac{x^{m-h}}{(a+bx)^{n-1}}$$

$$+(-1)^{h+1} \frac{ma}{[m-(n-1)]b} \cdots \frac{(m-h)a}{[(m-h)-(n-1)]b} \int \frac{x^{m-(h+1)} \Delta x}{(a+bx)^n}$$

Setzt man hierin für h den Werth $m-n$, so sind die beiden letzten möglichen Theile:

$$(-1)^{m-n} \frac{ma}{[m-(n-1)]b} \cdot \frac{(m-1)a}{[(m-1)-(n-1)]b} \cdots \frac{(n+1)}{2.b} \frac{x^n}{(a+bx)^{n-1}}$$

$$+ (-1)^{m-n+1} \frac{ma}{[m-(n-1)]b} \cdots \frac{n}{b} \int \frac{x^{n-1} \Delta x}{(a+bx)^n}$$

Nun kann man aber die Coefficienten bequemer ausdrücken, und es ist allgemein das hte Glied:

$$(-1)^h \frac{m(m-1)\ldots[m-(h-1)]}{[m-(n-1)][m-(n-1)-1)\ldots[m-(n-1)-h]} \frac{a^h}{b^{h+1}} \cdot \frac{x^{m-h}}{(a+bx)^{n-1}}$$

und also das vorletzte:

$$+(-1)^{m-n} \cdot \frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{[m-(n-1)]\ldots 1} \frac{a^{m-n}}{b^{m-n+1}} \cdot \frac{x^n}{(a+bx)^{n-1}}$$

Es ist daher, wenn man $m-(n-1) = r$ setzt:

$$\int \frac{x^m \Delta x}{(a+bx)^n} = \frac{1}{rb} \frac{x^m}{(a+bx)^{n-1}} - \frac{m}{r(r-1)} \cdot \frac{a}{b^2} \frac{x^{m-1}}{(a+bx)^{n-1}} \cdots$$

$$+(-1)^h \frac{m(m-1)\ldots[m-(h-1)]}{r(r-1)\ldots(r-h)} \frac{a^h}{b^{h+1}} \frac{x^{m-h}}{(a+bx)^{n-1}} \cdots$$

$$(-1)^{m-n} \frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{r(r-1)\ldots 1} \frac{a^{m-n}}{b^{m-n+1}} \frac{x^n}{(a+bx)^{n-1}}$$

$$+(-1)^{m-n+1} \frac{m(m-1)\ldots n}{r(r-1)\ldots 1} \frac{a^{m-n+1}}{b^{m-n+1}} \int \frac{x^{n-1} \Delta x}{(a+bx)^n}$$

z. B. Es ist:

$$\int \frac{x^6 \Delta x}{(a+bx)^3} = \left(\frac{1}{4b} x^6 - \frac{1}{2} \frac{a}{b^2} x^5 + \frac{5}{4} \frac{a^2}{b} x^4 - 5 \frac{a^3}{b^4} x^3\right) \frac{1}{(a+bx)^2} + \frac{15 a^4}{b^4} \int \frac{x^2 \Delta x}{(a+bx)^3}$$

Hat man daher für $\int \frac{x^m \Delta x}{(a+bx)^n}$ erst alle die Fälle berechnet, wo m kleiner ist, als n, welches durch Zerlegung leicht geschiehet, so folgen alle übrigen Fälle, m mag so groß seyn, wie man will, durch bloßes Abschreiben obiger allgemeinen Formel, indem man die Ergänzungsglieder, welche schon berechnet sind, substituirt.

Setzt man in obige Formel für n den Werth 1, so bekommt man jene erste Formel für $\frac{x^m}{a+bx}$ wieder, welche wir schon oben durch Division fanden.

Auch vermöge der Reductionsformel:

$$\int \frac{x^m \Delta x}{(a+bx)^n} = -\frac{1}{(n-1)b} \cdot \frac{x^m}{(a+bx)^{n-1}} + \frac{m}{(n-1)b} \int \frac{x^{m-1} \Delta x}{(a+bx)^{n-1}}$$

kann die Integration leicht vollzogen werden. Ist nemlich m kleiner, als n, so hat man:

$$\int \frac{x^m \Delta x}{(a+bx)^n} = -\frac{1}{(n-1)b} \frac{x^m}{(a+bx)^{n-1}}$$

$$-\frac{m}{(n-1)(n-2)} \frac{1}{b^2} \frac{x^{m-1}}{(a+bx)^{n-2}}$$

$$\ldots - \frac{m(m-1)\ldots[m-(h-2)]}{(n-1)(n-2)\ldots(n-h)} \cdot \frac{1}{b^h} \frac{x^{m-(h-1)}}{(a+bx)^{n-h}}$$

$$\ldots - \frac{m(m-1)\ldots 1}{(n-1)(n-2)\ldots[n-(m+1)]} \frac{1}{b^{m+1}} \frac{1}{(a+bx)^{n-(m+1)}}$$

z. B. Es ist:

$$\int \frac{x^3 \Delta x}{(a+bx)^6} = -\frac{1}{5b} \frac{x^3}{(a+bx)^6} - \frac{3}{20b^2} \frac{x^2}{(a+bx)^4}$$

$$-\frac{1}{10b^3} \frac{x}{(a+bx)^3} - \frac{1}{20b^4(a+bx)^2}$$

Hier wird die Integration allein durch Reduction, und zwar durch ein ziemlich einfaches Verfahren vollzogen, weshalb man sich dieser Methode immer mit Vortheil bedienen wird.

Anders ist es aber, wenn m größer, als n ist, dann verwandelt sie sich in:

$$\int \frac{x^m \Delta x}{(a+bx)^n} = -\frac{1}{(n-1)b}\,\frac{x^m}{(a+bx)^{n-1}}$$
$$-\frac{m}{(n-1)(n-2)b^2}\,\frac{x^{m-1}}{(a+bx)^{n-2}}\cdots$$
$$-\frac{m(m-1)\ldots[m-(h-2)]}{(n-1)(n-2)\ldots(n-h)b^h}\,\frac{x^{m-(h-1)}}{(a+bx)^{n-h}}\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-2)]}{(n-1)(n-2)\ldots 1\,b^{n-1}}\int\frac{x^{m-(n-1)}}{a+bx}$$

wo die letzte Integrande leicht zur Auflösung gebracht werden kann. Z. B. Es ist

$$\int\frac{x^6\Delta x}{(a+bx)^3} = -\frac{1}{2b}\,\frac{x^6}{(a+bx)^2} - \frac{3}{b^2}\,\frac{x^5}{(a+bx)} + \frac{60}{b^2}\int\frac{x^4\Delta x}{a+bx}$$

Vermöge dieser Formeln kann man nun jede algebraische Function zur Integration bringen; denn mögen die Nenner aussehen, wie man will, man kann sie immer in Factoren von der Form $a+bx$ oder $(a+bx)^n$ zerlegen, obgleich man sich sehr oft bequemer Reductionsformeln bedienen kann.

Integration irrationaler Differentiale.

§. 69.

Im Allgemeinen können nur rationale Formeln integrirt werden, und die Integration irrationaler Formeln geschiehet dadurch, daß man sie auf rationale zurückbringt, welches entweder durch Substitution, oder durch Reduction geschiehet.

Diejenigen irrationalen Ausdrücke, welche unmittelbar integrirt werden können, fallen unter die Form ax^n, $a+bx)^n$, wie schon oben gezeigt wurde. Man hat:

$$\int\sqrt[n]{x^m}\,\Delta x = \int x^{\frac{m}{n}}\,\Delta x = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} = \frac{nx^{\frac{m+n}{n}}}{m+n}$$

Eben so ist:

$$\int(a+bx)^{\frac{m}{n}}\Delta x = \frac{(a+bx)^{\frac{m}{n}+1}}{b\,(\frac{m}{n}+1)} = \frac{n(a+bx)^{\frac{m+n}{n}}}{b(m+n)}$$

Auch die Form:

$$x^r (a + bx^n)^{\frac{k}{m}} \Delta x$$

kann integrirt werden, wenn $r = n - 1$ ist, denn man hat:

$$\int x^{n-1} (a + bx^n)^r = \frac{(a + bx^n)^{r+1}}{(r + 1) bn} \text{ (§. 54.)}$$

wo r jede gebrochene Zahl bedeuten kann.

§. 70.

Die allgemeine Form:

$$\int x^m (a + bx^n)^{\frac{r}{s}} \Delta x$$

ist wichtig, wobei es aber selten der Fall seyn wird, daß $m = n - 1$ ist.

Substituirt man für $(a + bx^n)^{\frac{1}{s}}$ den Werth u, so ist:

$$a + bx^n = u^s$$

also

$$x = \left(\frac{u^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

und

$$dx = \frac{s}{nb} u^{s-1} \left(\frac{u^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{n} - 1} \Delta u$$

folglich:

$$\int x^m (a + bx^n)^{\frac{r}{s}} dx$$

$$= \int \left(\frac{u^s - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} u^r . \frac{s}{nb} \quad u^{s-1} \quad \left(\frac{u^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{n} - 1} \Delta u$$

$$= \frac{s}{nb} \int u^{r+s-1} \left(\frac{u^s - a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n} - 1} \Delta u$$

und dieses Integral kann zur Lösung gebracht werden, wenn $\frac{m+1}{n}$ eine ganze Zahl ist.

Man kann dieselbe Formel auch noch anders durch Substitution umändern, daß sie, wenn die Exponenten m, n, r, s gewisse Verhältnisse unter sich haben, rational wird.

Es ist:

$$\int x^m (a + bx^n)^{\frac{r}{s}} \Delta x = \int x^{m + \frac{nr}{s}} (ax^{-n} + b)^{\frac{r}{s}} \Delta x$$

setzt man

$$(ax^{-n}+b)^{\frac{1}{s}}=u,\ \text{also}\ x=\left(\frac{u^s-b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}}$$

$$\text{und}\ dx=-\frac{1}{n}\left(\frac{u^s-b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}-1}\cdot\frac{s}{a}u^{s-1}\Delta u$$

$$=-\frac{s}{na}\ u^{s-1}\ \left(\frac{u^s-b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}-1}\ \Delta u$$

so hat man:

$$\int x^m\ (a+bx^n)^{\frac{r}{s}}\ dx$$

$$=-\frac{s}{na}\ \int u^{r+s-1}\ \left(\frac{u^s-b}{a}\right)^{\frac{-m-1}{n}-\frac{r}{s}-1}\Delta u$$

$$=-\frac{s.a^{\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}}}{n}\int\frac{u^{r+s-1}\ \Delta u}{(u^s-b)^{\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}+1}}$$

eine Formel, welche rational wird, sobald $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}$ eine ganze Zahl ist.

Hat man daher eine Integrande von der Form $\int x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}\Delta x$, so wird man zuerst sehen müssen, ob $m=n-1$ ist, in welchem Falle die Integration ursprünglich vollzogen werden kann, oder, wenn dieses nicht der Fall ist, ob $\frac{m+1}{n}$ eine ganze Zahl ist, oder endlich, ob dieser Bruch $\frac{m+1}{n}$ durch $\frac{r}{s}$ zu einer ganzen Zahl ergänzt wird.

§. 71.

Es soll nun gezeigt werden, wie irrationale Formen durch Reduction integrirt werden können.

Es ist:

$$d[x^m(a+bx^n)^{r+1}]=m\,x^{m-1}(a+bx^n)^{r+1}\Delta x$$
$$+\,x^m(r+1)(a+bx^n)^r\ b\,n\,x^{n-1}\ \Delta x$$

also:

$$x^m (a + bx^n)^{r+1} = m\int x^{m-1} (a + bx^n)^{r+1} \Delta x$$
$$+ bn(r+1)\int x^{m+n-1} (a + bx^n)^r \Delta x$$
$$= m\int x^{m-1} (a + bx^n)^r (a + bx^n) \Delta x$$
$$+ bn(r+1)\int x^{m+n-1} (a + bx^n)^r \Delta x$$
$$= ma\int x^{m-1} (a + bx^n)^r \Delta x$$
$$+ b[m + n(r+1)]\int x^{m+n-1} (a + bx^n)^r \Delta x;$$

Hieraus folgt erstlich:

$$\int x^{m+n-1} (a + bx^n)^r \Delta x$$
$$= \frac{x^m (a + bx^n)^{r+1} - ma\int x^{m-1} (a + bx^n)^r \Delta x}{b[m + n(r+1)]}$$

oder, wenn man für $m + n - 1$ das Zeichen h setzt, so, daß also $m = h - n + 1$ ist, so hat man:

I. $\int x^h (a + bx^n)^r \Delta x$
$$= \frac{x^{h-n+1} (a + bx^n)^{r+1} - (h - n + 1) a\int x^{h-n} (a + bx^n)^r \Delta x}{b(h + nr + 1)}$$

Ferner folgt aus obiger Beziehung:

$$\int x^{m-1} (a + bx^n)^r \Delta x$$
$$= \frac{x^m (a + bx^n)^{r+1} - b[m + n(r+1)]\int x^{m+n-1} (a + bx^n)^r \Delta x}{ma}$$

oder wenn man überall für m den Werth $m + 1$ setzt, so ist:

II. $\int x^m (a + bx^n)^r \Delta x =$
$$\frac{x^{m+1} (a + bx^m)^{r+1} - b[m + 1 + n(p+1)]\int x^{m+n} (a + bx^n)^r \Delta x}{a(m+1)}$$

Beide Formel I und II erniedrigen den Exponenten von x außerhalb der Parenthese, und zwar geschiehet dies durch I, wenn m positiv, durch II, wenn m negativ ist. Man kann jedoch auch Reductionsformeln entwickeln, wo der Exponent von $(a + bx^n)$ vermindert wird, und zwar so, daß er positiv oder negativ seyn kann. Man kann ferner beide Zurückführungen zugleich vornehmen, wobei vier Fälle Statt finden müssen.

Es ist:

$$\int x^{m-1} (a + bx^n)^{r+1} \Delta x = a\int x^{m-1} (a + bx^n)^r \Delta x$$
$$+ b\int x^{m+n-1} (a + bx^n)^r \Delta x$$

aber nach I ist:

$$b\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^r \Delta x$$

$$=\frac{x^m(a+bx^n)^{r+1}-ma\int x^{m-1}(a+bx^n)^r \Delta x}{m+n(r+1)}$$

also:

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^{r+1}\Delta x = a\int x^{m-1}(a+bx^n)^r \Delta x$$

$$+\frac{x^m(a+bx^n)^{r+1}-ma\int x^{m-1}(a+bx^n)^r \Delta x}{m+n(r+1)}$$

$$=\frac{x^m(a+bx^n)^{r+1}}{m+n(r+1)}+\frac{na(r+1)}{m+n(r+1)}\int x_m^{-1}(a+bx^n)^r \Delta x$$

oder für m den Werth $m+1$, und für r den Werth $r-1$ gesetzt, ist:

III. $\int x^m(a+bx^n)^r \Delta x$

$$=\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^r}{m+1+nr}+\frac{nar}{m+1+nr}\int x^m(a+qx^n)^{r-1}\Delta x$$

Hier wird jedesmal der Exponent von $(a+bx^n)$ vermindert, während der von x derselbe bleibt, wobei aber vorausgesetzt wird, daß r positiv ist. Kehrt man diese Formel um, so hat man:

$$\int x^m(a+bx^n)^{r-1}\Delta x$$

$$=-\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^r}{nra}+\frac{(m+1+nr)}{nar}\int x^m(a+bx^n)^r \Delta x$$

oder für r den Werth $r+1$ gesetzt, hat man

IV. $\int x^m(a+bx^n)^r \Delta x$

$$=-\frac{x^{m+1}(a+bx)^{nr+1}}{na(r+1)}+\frac{m+1+n(r+1)}{na(r+1)}\int x^m(a+bx^n)^{r+1}\Delta x$$

Diese Formel leistet dasselbe, wenn r negativ ist.

Es ist nun leicht, auch die übrigen Formeln abzuleiten, wodurch beide Exponenten zugleich vermindert werden. Hier treten vier Fälle ein, entweder m und r sind beide positiv, beide negativ, m ist positiv, r negativ, oder endlich m ist negativ und r positiv.

Oben fanden wir bei Ableitung der Reductionsformel I die Beziehung:

$$x^m(a+bx^n)^{r+1} = ma\int x^{m-1}(a+bx^n)^r \Delta x$$

$$+b[m+n(r+1)]\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^r \Delta x$$

welches die Fundamentalformel zu allen diesen Reductionen ist. Nun hat man aber:

$$m\int x^{m-1}(a+bx^n)^{r+1}\Delta x = ma\int x^{m-1}(a+bx^n)^r\Delta x + bm\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^r\Delta x$$

also:

$$ma\int x^{m-1}(a+bx^n)^r\Delta x = m\int x^{m-1}(a+bx^n)^{r+1}\Delta x - bm\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^r\Delta x$$

folglich:

$$x^m(a+bx^n)^{r+1} = m\int x^{m-1}(a+bx^n)^{r+1}\Delta x + bn(r+1)\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^r\Delta x$$

und daher:

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^{r+1}\Delta x = \frac{x^m(a+bx^n)^{r+1} - bn(r+1)\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^r\Delta x}{m}$$

oder für m den Werth $m+1$, für r, $r-1$ gesetzt, hat man:

$$\text{V. } \int x^m(a+bx^n)^r\Delta x = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^r}{m+1} - \frac{bnr}{m+1}\int x^{m+n}(a+bx^n)^{r-1}\Delta x$$

welche Formel beide Exponenten vermindert, wenn m negativ, r positiv ist. Kehrt man diese Gleichung um, so hat man:

$$\int x^{m+n}(a+bx^n)^{r-1}\Delta x = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^r}{bnr} - \frac{m+1}{bnr}\int x^m(a+bx^n)^r\Delta x$$

oder, wenn man für $m+n$ den Werth h, fur r den Werth $r+1$ setzt,

$$\text{VI. } \int x^h(a+bx^n)^r\Delta x = \frac{x^{h-n+1}(a+bx^n)^{r+1}}{bn(r+1)} - \frac{h-n+1}{bn(r+1)}\int x^{h-n}(a+bx^n)^{r+1}\Delta x$$

welche Formel beide Exponenten in dem Falle reducirt, wenn h positiv, r negativ ist. Die beiden übrigen Fälle sind complicirter, und gewähren überhaupt nicht den bedeutenden Nutzen.

Wenn man nun eine von diesen Reductionsformeln anwenden will, so muß man zuerst sehen, welche Exponenten man am schicklichsten vermindern kann, um danach die Formel zu wählen.

Hätte man z. B. $\int \frac{x^m \Delta x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \int x^m (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \Delta x$ so kann man den Exponenten von $(1-x^2)$ d. h. $-\frac{1}{2}$ nicht vermindern, indem daraus keine Vereinfachung entstehen würde. Vermindert man m, so muß man die Formel I anwenden, da m positiv ist. Weil nun diese Verminderung um n, hier 2, geschiehet, so kömmt der Ausdruck, wenn m paar ist, auf $\int \frac{\Delta x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \text{Arc. Sin } x$ zurück, hingegen auf $\int \frac{x \Delta x}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\sqrt{(1-x^2)}$, wenn m unpaar seyn sollte.

Hätte man dagegen $\int \frac{\Delta x}{x^m \sqrt{(1-x^2)}} = \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} x^{-m} \Delta x$ so müßte man, um den Exponenten von x zu vermindern, die Formel II anwenden, wodurch $-m$ jedesmal um 2 zunimmt, also endlich zu 0 wird, wenn m paar ist, so, daß der Ausdruck wieder auf $\int \frac{\Delta x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \text{Arc. Sin. } x$ zurückkömmt, oder -1 bleibt, wenn m von unpaarem Range ist, wobei es zuletzt noch auf die Integration von $\frac{\Delta x}{x \sqrt{(1-x^2)}}$ ankäme. Substituirt man für $1 - x^2$ den Werth z^2, so, daß also $x = \sqrt{(1-z^2)}$, $dx = -\frac{1}{2}(1-z^2)^{-\frac{1}{2}} 2z \Delta z = -\frac{z \Delta z}{\sqrt{(1-z^2)}}$, so ist das Integral:

$$-\int \frac{z \Delta z}{\sqrt{(1-z^2)}.z.\sqrt{(1-z^2)}} = -\int \frac{\Delta z}{1-z^2} = -\frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$$

und setzt man für z seinen Werth wieder, so ist dasselbe

$$= -\frac{1}{2} \log \frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{1-\sqrt{(1-x^2)}}$$

Integration logarithmischer Functionen.

§. 72.

Es sey sowohl X als Y eine Function einer gewissen Hauptgröße, so hat man:

$$dXY = XdY + YdX,$$

also:

$$\int XdY = XY - \int YdX.$$

Wendet man diese allgemeine Reductionsformel auf das Integral $\int [\log x]^n . \varphi(x) \Delta x$ an, wo $\varphi(x)$ irgend eine algebraische Function von x bezeichnen mag, deren Integration also nach dem Vorhergehenden geleistet werden kann, so ist:

$$\int \varphi(x) [\log x]^n \Delta x = [\log x]^n \int \varphi(x) \Delta x$$
$$- \int \left(\frac{n [\log x]^{n-1} \quad \Delta x}{x} . \int \varphi(x) \Delta x \right)$$

oder, wenn man $\int \varphi(x) \Delta x$, welches als bekannt vorausgesetzt werden kann, durch X bezeichnet, so hat man:

$$\int \varphi(x) [\log x)^n \Delta x = X [\log x]^n - n \int \frac{X}{x} [\log x]^{n-1} \Delta x$$

Dieselbe Reduction kann man auch mit dem zweiten Theile vornehmen, wodurch der Exponent von log x wieder um eine Einheit vermindert wird u. s. f. Man hat also:

$$n \int \frac{X}{x} [\log x]^{n-1} \Delta x = n \int \left(\frac{X}{x} \Delta x \right) . [\log]^{n-1}$$
$$- n(n-1) \int \left([\log x]^{n-2} \frac{\Delta x}{x} \int \left(\frac{X \Delta x}{x} \right) \right)$$

oder, wenn man $\int \left(\frac{X}{x} \Delta x \right) = \overset{1}{X}$ setzt,

$$n \int \frac{X \Delta x}{x} [\log x]^{n-1} = n \overset{1}{X} [\log]^{n-1} - n(n-1) \int \frac{\overset{1}{X}}{x} [\log x]^{n-2} \Delta x$$

also hat man:

$$\int \varphi(x) \Delta x [\log x]^n$$
$$= X [\log x]^n - n \overset{1}{X} [\log x]^{n-1} + n(n-1) \int \frac{\overset{1}{X}}{x} [\log x]^{n-2} \Delta x.$$

Fährt man mit dem Reduciren fort, so wird man allgemein nach der rten auf:

$$\int \varphi(x) \Delta x [\log x]^n = X [\log x]^n - n \overset{1}{X} [\log x]^{n-1} + \ldots$$
$$+ (-1)^r n(n-1) .. [n-(r-1)] \overset{r}{X} [\log x]^{n-r}$$
$$+ (-1)^{r+1} n(n-1) .. (n-r) \int \frac{\overset{r}{X} \Delta x}{x} [\log x]^{n-(r+1)}$$

gekommen seyn, wo allemein

$$\overset{r}{X} = \int \frac{\overset{r-1}{X} \Delta x}{x}$$

bedeutet. Ist n eine ganze positive Zahl, und setzt man in diesen Ausdruck für r den Werth $n-1$, d. h. führt man die Reduction bis zur $n-1$ten; so hat man:

$$\int\varphi(x)\,\Delta x\,[\log x]^n = X[\log x]^n - n\overset{1}{X}[\log x]^{n-1}$$

$$+n(n-1)\overset{2}{X}[\log x]^{n-2}\ldots+(-1)^r n(n-1)\ldots[n-(r-1)]\overset{r}{X}[\log x]^{n-r}$$

$$\ldots(-1)^{n-1}n(n-1)\ldots2\overset{n-1}{X}[\log x]^1 + (-1)^n n(n-1)\ldots1\int\frac{\overset{n-1}{X}\Delta x}{x}$$

wo der letzte Theil nach dem Vorhergehenden integrirt werden kann, indem die Function nur algebraisch ist.

Z. B. Es sey:

$$\varphi(x) = x^m,$$

so ist:

$$X = \int x^m\,\Delta x = \frac{x^{m+1}}{m+1},\quad \overset{1}{X} = \int\frac{x^{m+1}\,\Delta x}{x(m+1)} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$$

und allgemein:

$$\overset{h}{X} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^{h+1}}$$

also:

$$\int x^m\,\Delta x[\log x]^n = \frac{x^{m+1}}{m+1}[\log x]^n - n\frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}[\log x]^{n-1}\ldots$$

$$+(-1)^h\frac{n(n-1)\ldots[n-(h-1)]}{(m+1)^{h+1}}x^{m+1}[\log x]^{n-h}\ldots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{n(n-1)\ldots2}{(m+1)^n}x^{m+1}[\log x]^2$$

$$+(-1)^n n(n-1)\ldots1\frac{x^{m+1}}{(m+1)^{n+1}}.$$

Ist in dieser Formel $m=-1$, so hat man:

$$\int\frac{[\log x]^n}{x}\Delta x = \frac{[\log x]^{n+1}}{n+1}$$

Für $n=1$ hat man:

$$\int x^m\,\Delta x\,[\log x] = \frac{x^{m+1}}{m+1}\log x - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\log x - \frac{1}{m+1}\right)$$

Setzt man $m = 0$, so ist.

$$\int \log x \,\Delta x = x \log x - x$$

§. 73.

Ist der Exponent von $\log x$ negativ, so würde die im vorigen §. abgeleitete Formel das Gefoderte nicht allein nicht zur Darstellung bringen, sondern sogar vom Zwecke immer weiter abführen. Es ist jedoch leicht, auch für diesen Fall eine eigene Reduction zu entwickeln.

Es ist:

$$\int \frac{\varphi(x)\,\Delta x}{[\log x]^n} = \int \frac{x\,\varphi(x)\,\Delta x}{x\,[\log x]^n}$$

also da

$$\int \frac{\Delta x}{x\,[\log x]^n} = \int \frac{d \log x}{[\log x]^n} = -\frac{1}{(n-1)[\log x]^{n-1}}$$

so hat man:

$$\int \frac{\varphi(x)\,\Delta x}{[\log x]^n} = -\frac{x\,\varphi(x)}{(n-1)\,[\log x]^{n-1}} + \int \frac{d[x\,\varphi(x)]}{(n-1)\,[\log x]^{n-1}}$$

$$= -\frac{xX}{(n-1)\,[\log x]^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{\overset{1}{X}\,\Delta x}{[\log x]^{n-1}}$$

wenn $\varphi(x) = X$, $\frac{d[x\,\varphi(x)]}{\Delta x} = \overset{1}{X}$ gesetzt wird. Ferner hat man:

$$\frac{1}{n-1} \int \frac{\overset{1}{X}\,\Delta x}{[\log x]^{n-1}} = \frac{1}{n-1} \int \frac{x\overset{1}{X}\,\Delta x}{x[\log x]^{n-1}}$$

$$= -\frac{1}{(n-1)(n-2)} \frac{x\overset{1}{X}}{[\log x]^{n-2}} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} \int \frac{d(x\overset{1}{X})}{[\log x]^{n-2}}$$

$$= -\frac{1}{(n-1)(n-2)} \frac{x\overset{1}{X}}{[\log x]^{n-2}} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} \int \frac{\overset{2}{X}\,\Delta x}{[\log x]^{n-2}}$$

wenn $d(x\overset{1}{X}) = \overset{2}{X}$ gesetzt wird.

Also hat man:

$$\int \frac{\varphi(x)\,\Delta x}{[\log x]^n} = -\frac{x.X}{(n-1)[\log x]^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)(n-2}\,\frac{x\overset{1}{X}}{[\log x]^{n-2}}$$

$$+\frac{1}{(n-1)(n-2)}\int\frac{\overset{2}{X}\,\Delta x}{[\log u]^{n-2}}$$

Man erhält allgemein nach r Reductionen:

$$\int\frac{\varphi(x)\,\Delta x}{[\log x]^n} = -\frac{1}{n-1}\,\frac{X}{[\log x]^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)(n-2)}\,\frac{x\overset{1}{X}}{[\log x]^{n-2}}\dots$$

$$-\frac{1}{(n-2)\,..\,[n-(r+1)]}\,\frac{x\overset{r}{X}}{[\log x]^{n-(r+1)}}$$

$$+\frac{1}{(n-1)\,..\,[n-(r+1)]}\int\frac{\overset{r}{X}\,\Delta x}{[\log x]^{n-(r+1)}}$$

und für $r = n-2$ gesetzt, oder nach $n-2$ Reductionen ist endlich:

$$\int\frac{\varphi(x)\,\Delta x}{[\log x]^n} = -\frac{1}{n-1}\,\frac{xX}{[\log x]^{n-1}} - \,..\,\frac{1}{(n-1)\,..\,[n-(r+1)]}$$

$$\frac{x\overset{r}{X}}{[\log x]^{n-(r+1)}}\dots - \frac{1}{(n-1)\,..\,1}\cdot\frac{x\overset{n-1}{X}}{[\log x]^{1}}$$

$$+\frac{1}{(n-1)\,..\,1}\int\frac{\overset{n-1}{X}\,\Delta x}{\log x}$$

wo allgemein: $\overset{r}{X} = \frac{d\,(x\overset{r-1}{X})}{\Delta x}$ ist.

Hätte man z. B. den Ausdruck:

$\int\frac{x^m\,\Delta x}{[\log x]^n}$, so ist hier $X = x^m$, $\overset{1}{X} = \frac{d\,x^{m+1}}{\Delta x} =$ $(m+1)x^m$, $\overset{2}{X} = (m+1)^2\,x^m$, allgemein, $\overset{r}{X} = (m+1)^r\,x^m$

folglich:

$$\int \frac{x^m \Delta x}{[\log x]^n} = -\frac{1}{n-1}\frac{x^{m+1}}{[\log x]^{n-1}} - \frac{m+1}{(n-1)(n-2)}\frac{x^{m+1}}{[\log x]^{n-2}} \ldots$$

$$- \frac{(m+1)^r}{(n-1)\ldots[n-(r+1)]}\frac{x^{m+1}}{[\log x]^{n-(r+1)}} \ldots$$

$$- \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)\ldots 1}\frac{x^{m+1}}{\log x} + \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)\ldots 1}\int \frac{x^m \Delta x}{\log x}$$

Für $m = -1$ ist dieser Ausdruck:

$$\int \frac{\Delta x}{x[\log x]^n} = -\frac{1}{(n-1)[\log x]^{n-1}}$$

indem alle nachfolgenden Glieder wegen des zu o werdenden Factors wegfallen.

Ist also in dem Ausdrucke $x^m[\log x]^n \Delta x$, n positiv, so ist derselbe vollkommen integrabal, ist n hingegen negativ, so wird man das Integral nach der eben abgeleiteten Formel auf $\int \frac{x^m \Delta x}{\log x}$ zurückbringen können. Setzt man hierin für x^{m+1} den Werth v, so ist $dv = (m+1)x^m \Delta x$, und $\log v = (m+1)\log x$, daher

$$\int \frac{x^m \Delta x}{\log x} = \int \frac{dv}{\log v}$$

welcher Ausdruck jedoch nur durch Reihen integrirt werden kann.

Integration der exponentiellen Functionen.

§. 74.

Da

$$d\, a^x = a^x \Delta x \log \text{nat } a,$$

so ist:

$$\int a^x \Delta x = \frac{a^x}{\log \text{nat } a}$$

Man habe nun allgemein:

$$dy = \varphi(x)\, a^x \Delta x,$$

wo $\varphi(x)$ jede algebraische Function von x bedeute, so ist:

$$y = \int \varphi(x) a^x \Delta x = \frac{\varphi(x) a^x}{\log a} - \int \frac{a^x\, d\varphi(x)}{\log a}$$

oder, wenn man $\varphi(x) = X$, $\frac{d\varphi(x)}{\Delta x} = \overset{1}{X}$ setzt,

$$y = \frac{X a^x}{\log a} - \int \frac{\overset{1}{X} a^x \Delta x}{\log a}$$

Eben so ist:

$$\int \frac{\overset{1}{X} a^x \Delta x}{\log a} = \frac{\overset{1}{X} a^x}{[\log a]^2} - \int \frac{d \overset{1}{X} a^x}{[\log a]^2}$$

oder wenn man $\frac{d \overset{1}{X}}{\Delta x} = \overset{2}{X}$ setzt,

$$\int \frac{\overset{1}{X} a^x \Delta x}{\log a} = \frac{\overset{1}{X} a^x}{[\log a]^2} - \int \frac{\overset{2}{X} a^x \Delta x}{[\log a]^2}$$

so erhält man also allgemein nach der rten Reduction:

$$y = \frac{X a^x}{\log a} - \frac{\overset{1}{X} a^x}{[\log a]^2} + \frac{\overset{2}{X} a^x}{[\log a]^3} - \ldots$$

$$+ (-1)^r \frac{\overset{r}{X} a^x}{[\log a]^{r+1}} + (-1)^r \int \frac{\overset{r+1}{X} a^x \Delta x}{[\log a]^{r+1}}$$

wo allgemein $\overset{r}{X} = \frac{d \overset{r-1}{X}}{\Delta x}$ ist.

Diese Formel bricht von selbst ab, wenn $\varphi(x)$ eine algebraische rationale ganze Function von x ist; hat man alsdann $\overset{r}{X} = \text{const}$, so ist $\overset{r+1}{X} = 0$, wodurch die Integrande wegfällt.

Z. B. Es sey: $\varphi(x) = x^m$, wo m eine ganze positive Zahl bedeutet, so hat man: $X = x^m$, $\overset{1}{X} = m x^{m-1}$ allgemein

$\overset{r}{X} = m(m-1)\ldots(m-(r-1))\,x^{m-r}$, $\overset{m}{X} = m(m-1)\ldots 2 \cdot 1$ und $\overset{m+1}{X} = 0$.

daher:

$$y = \int x^m a^x \Delta x = \frac{x^m a^x}{\log a} - \frac{m x^{m-1} a^x}{[\log a]^2} + \frac{m(m-1) x^{m-2} a^x}{[\log a]^3}$$

$$\ldots + (-1)^r \frac{m(m-1)\ldots(m-(r-1))\, x^{m-r}\, a^x}{[\log a]^{r+1}}$$

$$\ldots (-1)^m \frac{m(m-1)\ldots 1\; a^x}{[\log a]^{m+1}}$$

$$= \frac{a^x}{\log a}\Big[x^m - \frac{m x^{m-1}}{\log a} + \ldots (-1)^r \frac{m(m-1)\ldots(m-(r-1))\, x^{m-r}}{[\log a]^r}$$

$$\ldots (-1)^{m-1} \frac{m(m-1)\ldots 2}{[\log a]^{m-1}} x + (-1)^m \frac{m(m-1)\ldots 1}{[\log a]^m}\Big]$$

z. B.

$$\int x^3 a^x \Delta x = \frac{a^x}{\log a}\Big[x^3 - \frac{3x^2}{\log a} + \frac{3 \cdot 2 \cdot x^1}{[\log a]^2} - \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{[\log a]^3}\Big]$$

$$\int x^4 a^x \Delta x = \frac{a^x}{\log a}\Big[x^4 - \frac{4x^3}{\log a} + \frac{4 \cdot 3 x^2}{[\log a]^2} - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 x}{[\log a]^3}$$

$$+ \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{[\log a]^4}\Big]$$

Ist daher in dem Ausdrucke $x^m a^x \Delta x$, m eine positive ganze Zahl, so ist derselbe vollständig integrabel, welches auch mit jeder algebraischen rationalen ganzen Function von x, welche man für $\varphi(x)$ substituiren wollte, der Fall ist. Es sey z. B. $\varphi(x) = b x^3 - x$, so ist $\overset{1}{X} = 3bx^2 - 1$, $\overset{2}{X} = 6bx$, $\overset{3}{X} = 6b$, $\overset{4}{X} = 0$, folglich:

$$\int (bx^3 - x)\, a^x \Delta x = \frac{bx^3 - x}{\log a} a^x - \frac{(3bx^2 - 1)\, a^x}{[\log a]^2}$$

$$+ \frac{6bx \cdot a^x}{[\log a]^3} - \frac{6b \cdot a^x}{[\log a]^4}$$

Ist aber m negativ, das Integral also von folgender Gestalt: $\frac{\int a^x \Delta x}{x^m}$, so bricht obige Reihe nicht ab, und ist also für diesen Fall unbrauchbar.

§. 75.

Man hat aber:

$$\int \varphi(x) a^x \Delta x = a^x \int \varphi(x) \Delta x - \int (a^x \Delta x . \log a \int \varphi(x) \Delta x)$$

oder, wenn man das algebraische Integral $\int \varphi(x) \Delta x$, welches nach den vorhergehenden Regeln gefunden werden kann, $= \overset{1}{X}$ setzt, so ist:

$$\int \varphi(x)\, a^x \,\Delta\, x = a^x \overset{1}{X} - \log a \int \overset{1}{X} a^x \,\Delta\, x$$

ferner hat man:

$$\log a . \int \overset{1}{X} a^x \Delta x = \log a . a^x \int \overset{1}{X} \Delta x - [\log a]^2 \int (a^x \Delta x . \int \overset{1}{X} \Delta x)$$

$$= \log a : a^x \overset{2}{X} - [\log a]^2 \int \overset{2}{X} a^x \,\Delta\, x$$

also

$$\int \varphi(x) a^x \Delta x = \overset{1}{X} a^x - \log a \overset{2}{X} a^x + [\log a]^2 \int \overset{2}{X} a^x \Delta x$$

Man erhält allgemein nach r Reductionen:

$$\int \varphi(x) a^x \Delta x = \overset{1}{X} a^x - \log a \overset{2}{X} a^x + \ldots (-1)^r [\log a]^r \overset{r+1}{X} a^x$$
$$+ (-1)^{r+1} [\log a]^{r+1} \int \overset{r+1}{X} a^x \Delta x$$

wo allgemein: $\overset{r}{X} = \int \overset{r-1}{X} \Delta x$

Ist z. B. $\varphi(x) = x^{-m}$, so hat man:

$$\overset{1}{X} = \int x^{-m} \,\Delta\, x = - \frac{1}{(m-1)\ x^{m-1}}$$

$$\overset{2}{X} = - \int \frac{x^{1-m} \,\Delta x}{m-1} = \frac{x^{2-m}}{(m-1)(m-2)} = \frac{1}{(m-1)(m-2) x^{m-2}}$$

allgemein:

$$\overset{r}{X} = (-1)^r \frac{1}{(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,(m-r)\, x^{m-r}}$$

folglich:

$$\int \frac{a^x \Delta x}{x^m} = - \frac{1}{m-1} . \frac{a^x}{x^{m-1}} - \frac{\log a}{(m-1)(m-2)} . \frac{a^x}{x^{m-2}} \ldots$$
$$- \frac{[\log a]^r}{(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,(m-(r+1))}\ \frac{a^x}{x^{m-(r+1)}}$$
$$+ \frac{[\log a]^{r+1}}{(m-1)\,\ldots\,(m-(r+1))} \int \frac{a^x \,\Delta\, x}{x^{m-(r+1)}}$$

setzt man hierin für r den Werth m−2, d. h. treibt man die Reduction bis zur m−2ten, so ist der letzte Theil:

$$\frac{[\log a]^{m-1}}{(m-1)(m-2)..1}\int\frac{a^x\,\Delta x}{x}$$

und also:

$$\int\frac{a^x\,\Delta x}{x^m}=-\frac{1}{m-1}\,\frac{a^x}{x^{m-1}}-\frac{\log a}{(m-1)(m-2)}\,\frac{a^x}{x^{m-2}}$$

$$\ldots-\frac{[\log a]^h}{(m-1)..(m-(h+1))}\,\frac{a^x}{x^{m-(h+1)}}\ldots-\frac{[\log a]^{m-2}}{(m-1)\ldots 1}\,\frac{a^x}{x}$$

$$+\frac{[\log a]^{m-1}}{(m-1)\ldots 1}\int\frac{a^x\,\Delta x}{x}$$

Hier wird also die Integration auf $\int\frac{a^x\,\Delta x}{x}$ zurückgebracht, welches durch eine Reihe entwickelt werden kann.

Man hat nämlich:

$$a^x=1+\log a.x+\frac{[\log a]^2}{1.2}x^2..+\frac{[\log a]^h}{1.2..h}x^h\ldots$$

folglich:

$$\int\frac{a^x\,\Delta x}{x}=\int\left[\frac{\Delta x}{x}+\log a\,\Delta x+..\frac{[\log a]^h}{1.2..h}x^{h-1}\,\Delta x\ldots\right]$$

$$=\log x+\log a.x+..+\frac{[\log a]^h}{1.2..h}\,\frac{x^h}{h}..$$

Man hat z. B.

$$\int\frac{a^x\,\Delta x}{x^4}=-\tfrac{1}{3}\,\frac{a^x}{x^3}-\frac{\log a}{3.2}\,\frac{a^x}{x^2}-\frac{[\log a]^2}{3.2.1}\,\frac{a^x}{x}$$

$$+\frac{[\log a]^3}{3.2.1}\int\frac{a^x\,\Delta x}{x}$$

$$\int\frac{a^x\,\Delta x}{x^6}=-\tfrac{1}{5}\,\frac{a^x}{x^5}-\frac{\log a}{5.4}\,\frac{a^x}{x^4}-\frac{[\log a]^2}{5.4.3}\,\frac{a^x}{x^3}$$

$$-\frac{[\log a]^3}{5.4.3.2}\,\frac{a^x}{x^2}-\frac{[\log a]^4}{5.4.3.2.1}\,\frac{a^x}{x}+\frac{[\log a]^5}{5.4\ldots 1}\int\frac{a^x\,\Delta x}{x}$$

Integration der Kreisfunctionen.

§. 76.

Man hat (§. 25 — 32.)

$$\int \mathrm{Sin}\,\varphi \,\triangle\, \varphi = -\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \text{const.} = \mathrm{Sin\,vers}\,\varphi + \text{const.}$$

$$\int \mathrm{Cos}\,\varphi \,\triangle\, \varphi = \mathrm{Sin}\,\varphi + \text{const.} = -\,\mathrm{Cos\,vers}\,\varphi + \text{const.}$$

$$\int \frac{\triangle\,\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} = \mathrm{Tang}\,\varphi + \text{const.}$$

$$\int \frac{\triangle\,\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2} = -\,\mathrm{Cot.}\,\varphi + \text{const.}$$

$$\int \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi\,\triangle\,\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} = \mathrm{Sec}\,\varphi + \text{const.}$$

$$\int \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi\,\triangle\,\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2} = -\,\mathrm{Cosec.}\,\varphi + \text{const.}$$

Es sey nun:

$$y = [\mathrm{Sin}\,\varphi]^n\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m$$

so ist:

$$\begin{aligned} dy &= [\mathrm{Sin}\,\varphi]^n \,.\, m\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}\, d\,\mathrm{Cos}\,\varphi \\ &\quad + [\mathrm{Cos}\,\varphi]^m \,.\, n\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}\, d\,\mathrm{Sin}\,\varphi \\ &= -\,m\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n+1}\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}\,\triangle\,\varphi \\ &\quad + n\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m+1}\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}\,\triangle\,\varphi \\ &= -\,m\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n+1}\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}\,\triangle\,\varphi \\ &\quad + n\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}\,(1 - [\mathrm{Sin}\,\varphi]^2)\,\triangle\,\varphi \\ &= -\,m[\mathrm{Sin}\varphi]^{n+1}[\mathrm{Cos}\varphi]^{m-1}\triangle\varphi + n[\mathrm{Cos}\varphi]^{m-1}[\mathrm{Sin}\varphi]^{n-1}\triangle\varphi \\ &\quad -\,n\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n+1}\,\triangle\,\varphi \\ &= -\,(m+n)\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n+1}\,[\mathrm{Cos}\varphi]^{m-1}\,\triangle\,\varphi \\ &\quad + n[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}\,\triangle\,\varphi \\ &= d([\mathrm{Sin}\,\varphi]^n\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m) \end{aligned}$$

folglich hat man:

$$-\,(m+n)\int[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n+1}\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}\,\triangle\,\varphi + n\int[\mathrm{Cos}\varphi]^{m-1}\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}\,\triangle\varphi = [\mathrm{Sin}\,\varphi]^n\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m.$$

oder:

$$\int[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}\,\triangle\,\varphi = \frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m}{n} + \frac{m+n}{n}\int[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n+1}\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}\,\triangle\,\varphi$$

Setzt man für m den Werth m + 1, für n den Werth n + 1, so hat man:

$$\text{I.}\quad \int[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n\,\triangle\varphi = \frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n+1}[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m+1}}{n+1}$$
$$+\frac{m+n+2}{n+1}\int[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n+2}[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m\,\triangle\varphi$$

Aus obiger Formel folgt auch:

$$\int[\mathrm{Sin}\varphi]^{n+1}[\mathrm{Cos}\varphi]^{m-1}\triangle\varphi = \frac{n}{m+n}\int[\mathrm{Cos}\varphi]^{m-1}[\mathrm{Sin}\varphi]^{n-1}\triangle\varphi$$
$$-\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m}{m+n}$$

für m den Werth m + 1, für n den Werth n - 1 gesetzt, hat man:

$$\text{II.}\quad \int[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m\triangle\varphi = \frac{n-1}{m+n}\int[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-2}\triangle\varphi$$
$$-\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m+1}}{m+n}$$

Da wir oben fanden:

$$dy = -m[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n+1}[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}\triangle\varphi$$
$$+n[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m+1}[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}\triangle\varphi$$

so hat man:

$$dy = -m(1-[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2)[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}\triangle\varphi$$
$$+n[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m+1}[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}\triangle\varphi$$
$$= -m[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}\triangle\varphi + m[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m+1}\triangle\varphi$$
$$+n[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m+1}[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}\triangle\varphi$$
$$=(m+n)[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m+1}\triangle\varphi$$
$$-m[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}\triangle\varphi$$

Also:

$$y = [\mathrm{Sin}\,\varphi]^n[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m = (m+n)\int[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m+1}\triangle\varphi$$
$$-m\int[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}\triangle\varphi$$

und:

$$\int[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}\triangle\varphi = \frac{m+n}{m}\int[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m+1}\triangle\varphi$$
$$-\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m}{m}$$

oder, wenn man statt n, n + 1, statt m, den Werth m + 1 substituirt, erhält man

$$\text{III.} \quad \int [\sin\varphi]^n [\cos\varphi]^m \Delta\varphi = -\frac{[\sin\varphi]^{n+1} [\cos\varphi]^{m+1}}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int [\sin\varphi]^n [\cos\varphi]^{m+2} \Delta\varphi$$

Hieraus folgt wieder:

$$\int [\sin\varphi]^n \cos\varphi]^{m+2} \Delta\varphi = \frac{[\sin\varphi]^{n+1} [\cos\varphi]^{m+1}}{m+n+2} + \frac{m+1}{m+n+2} \int [\sin\varphi]^n [\cos\varphi]^m \Delta\varphi.$$

oder, für m den Werth m − 2 gesetzt, erhält man:

$$\text{IV.} \quad \int [\sin\varphi]^n [\cos\varphi]^m \Delta\varphi = \frac{[\sin\varphi]^{n+1} [\cos\varphi]^{m-1}}{n+m} + \frac{m-1}{m+n} \int [\sin\varphi]^n [\cos\varphi]^{m-2} \Delta\varphi$$

§. 77.

Setzt man in die Formel II. des vorhergehenden § $m = 0$, so erhält man:

$$\int [\sin\varphi]^n \Delta\varphi = -\frac{1}{n} [\sin\varphi]^{n-1} \cos\varphi + \frac{n-1}{n} \int [\sin\varphi]^{n-2} \Delta\varphi$$

Wendet man diese Reduction auf den zweiten Theil an, so hat man:

$$\frac{n-1}{n} \int [\sin\varphi]^{n-2} \Delta\varphi = -\frac{(n-1)}{n(n-2)} [\sin\varphi]^{n-3} [\cos\varphi] + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)} \int [\sin\varphi]^{n-4} \Delta\varphi$$

folglich ist:

$$\int [\sin\varphi]^n \Delta\varphi = -\frac{1}{n} [\sin\varphi]^{n-1} \cos\varphi - \frac{n-1}{n(n-2)} \int [\sin\varphi]^{n-3} \cos\varphi + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)} \int [\sin\varphi]^{n-4} \Delta\varphi$$

Führt man die Reduction bis zur r + 1ten aus, so erhält man:

$$\int[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n \Delta\varphi = -\frac{1}{n}[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}\mathrm{Cos}\,\varphi - \frac{n-1}{n(n-2)}[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-3}\mathrm{Cos}\,\varphi$$
$$\ldots - \frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-(2r-1))}{n(n-2)\ldots(n-2r)}[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-(2r+1)}\mathrm{Cos}\,\varphi$$
$$+ \frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-(2r+1))}{n(n-2)\ldots(n-2r)}\int(\mathrm{Sin}\,\varphi)^{n-(2r+1)}\Delta\varphi$$

Ist n eine unpaare Zahl, so bricht diese Formel von selbst ab, und die Integration ist dadurch vollzogen.

Setzt man $2r+1=n$, also $r=\frac{n-1}{n}$, so ist:

$$\int(\mathrm{Sin}\,\varphi)^n\Delta\varphi = -\frac{1}{n}(\mathrm{Sin}\,\varphi)^{n-1}\mathrm{Cos}\,\varphi - \frac{n-1}{n(n-2)}(\mathrm{Sin}\,\varphi)^{n-3}\mathrm{Cos}\,\varphi\ldots$$
$$- \frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{n(n-2)\ldots 1}(\mathrm{Sin}\,\varphi)^0\,\mathrm{Cos}\,\varphi$$

wobei die Integrande wegen des Factors $n-(2r+1)$ wegfällt.

Z. B. Es ist:

$$\int(\mathrm{Sin}\,\varphi)^5\Delta\varphi = -\tfrac{1}{5}(\mathrm{Sin}\,\varphi)^4\mathrm{Cos}\,\varphi$$
$$-\tfrac{4}{15}(\mathrm{Sin}\,\varphi)^3\mathrm{Cos}\,\varphi - \tfrac{8}{15}\mathrm{Cos}\,\varphi$$
$$\int(\mathrm{Sin}\,\varphi)^9\Delta\varphi = -\tfrac{1}{9}(\mathrm{Sin}\,\varphi)^8\mathrm{Cos}\,\varphi - \tfrac{8}{63}(\mathrm{Sin}\,\varphi)^6\mathrm{Cos}\,\varphi$$
$$-\tfrac{16}{105}(\mathrm{Sin}\,\varphi)^4\mathrm{Cos}\,\varphi - \tfrac{64}{315}(\mathrm{Sin}\,\varphi)^2\mathrm{Cos}\,\varphi - \tfrac{128}{315}\mathrm{Cos}\,\varphi$$

Ist aber n eine paare Zahl, so kann man die Reduction höchstens so weit treiben, bis $n-2r=2$, oder $r=\frac{n-2}{2}$ ist, indem sonst die Nenner verschwinden würden. In diesem Falle ist aber:

$$\int(\mathrm{Sin}\,\varphi)^n\Delta\varphi = -\frac{1}{n}(\mathrm{Sin}\,\varphi)^{n-1}\mathrm{Cos}\,\varphi$$
$$-\frac{n-1}{n-(n-2)}(\mathrm{Sin}\,\varphi)^{n-3}\mathrm{Cos}\,\varphi\ldots - \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3}{n(n-2)\ldots 2}(\mathrm{Sin}\,\varphi)^1\mathrm{Cos}\,\varphi$$
$$+\frac{n(n-3)\ldots 1}{n(n-2)\ldots 2}\int(\mathrm{Sin}\,\varphi)^0\Delta\varphi$$

wo der letzte Theil $=\frac{n(n-3)\ldots 1}{n(n-2)\ldots 2}\varphi$ ist.

Z. B.

$$\int(\mathrm{Sin}\,\varphi)^4\Delta\varphi = -\tfrac{1}{4}(\mathrm{Sin}\,\varphi)^3\mathrm{Cos}\,\varphi - \tfrac{3}{8}\mathrm{Sin}\,\varphi\,.\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \tfrac{3}{8}\varphi$$
$$\int(\mathrm{Sin}\,\varphi)^8\Delta\varphi = -\tfrac{1}{8}(\mathrm{Sin}\,\varphi)^7\mathrm{Cos}\,\varphi - \tfrac{7}{48}(\mathrm{Sin}\,\varphi)^5\mathrm{Cos}\,\varphi$$
$$-\tfrac{35}{192}(\mathrm{Sin}\,\varphi)^3\mathrm{Cos}\,\varphi - \tfrac{105}{384}(\mathrm{Sin}\,\varphi)\mathrm{Cos}\,\varphi + \tfrac{105}{384}\varphi.$$

§. 78.

Auf ähnliche Art kann man auch eine Formel für

$\int (\mathrm{Cos}\,\varphi)^m \,\triangle\, \varphi$ ableiten; denn setzt man in die Formel IV. §. 76. $n = o$, so hat man:

$$\int (\mathrm{Cos}\,\varphi)^m \triangle \varphi = \frac{1}{m}(\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-1}\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \frac{m-1}{m}\int (\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-2} \triangle \varphi$$

Wendet man diese Reduction auf den zweiten Theil an, so findet man:

$$\frac{m-1}{m}\int (\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-2} \triangle \varphi = \frac{m-1}{m(m-2)}(\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-3}\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)}\int (\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-4} \triangle \varphi$$

Also hat man:

$$\int (\mathrm{Cos}\,\varphi)^m \triangle \varphi = \frac{1}{m}(\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-1}\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \frac{m-1}{m(m-2)}(\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-3}\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)}\int (\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-4} \triangle \varphi$$

Man wird allgemein nach r Reductionen den Ausdruck:

$$\int (\mathrm{Cos}\,\varphi)^m \triangle \varphi = \frac{1}{m}(\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-1}\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \frac{m-1}{m(m-2)}(\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-3}\,\mathrm{Sin}\,\varphi \ldots + \frac{(m-1).(m-3)..(m-(2r-1))}{m(m-2)..(m-2r)}(\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-(2r+1)}\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \frac{(m-1)..(m-(2r+1))}{m(m-2)..(m-2r)}\int (\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-(2r+2)} \triangle \varphi.$$

Diese Formel bricht von selbst ab, wenn m eine ganze positive und zwar unpaare Zahl ist, denn macht man $m-(2r+1) = o$ oder $r = \frac{m-1}{2}$, so hat man:

$$\int (\mathrm{Cos}\,\varphi)^m \triangle \varphi = \frac{1}{m}(\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-1}\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \frac{m-1}{m(m-2)}(\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-3}\mathrm{Sin}\,\varphi \ldots + \frac{(m-1)(m-3)..2}{m(m-2)..1}(\mathrm{Cos}\,\varphi)^{o}\,\mathrm{Sin}\,\varphi$$

3. B.

$$\int (\mathrm{Cos}\,\varphi)^5 \triangle \varphi = \tfrac{1}{5}(\mathrm{Cos}\,\varphi)^4\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{4}{15}(\mathrm{Cos}\,\varphi)^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{8}{15}\mathrm{Sin}\,\varphi$$

$$\int (\mathrm{Cos}\,\varphi)^9 \triangle \varphi = \tfrac{1}{9}(\mathrm{Cos}\,\varphi)^8\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{8}{63}(\mathrm{Cos}\,\varphi)^6\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{16}{105}(\mathrm{Cos}\,\varphi)^4\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{64}{315}(\mathrm{Cos}\,\varphi)^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{128}{315}\mathrm{Sin}\,\varphi$$

Ist hingegen m eine paare Zahl, so kann die Reduction nicht weiter getrieben werden, als bis $m-2r = 2$ oder $r = \frac{m-2}{2}$ ist, indem sonst die Nenner verschwinden würden. Alsdann ist die Formel:

$$\int (\mathrm{Cos}\,\varphi)^m \,\Delta\varphi = \frac{1}{m} (\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-1} \,\mathrm{Sin}\,\varphi$$
$$+ \frac{m-1}{m(m-2)} (\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-3} \,\mathrm{Sin}\,\varphi \ldots + \frac{(m-1)(m-3)\ldots 3}{m(m-2)\ldots 2} \mathrm{Cos}\,\varphi \,\mathrm{Sin}\,\varphi$$
$$+ \frac{(m-1)(m-3)\ldots 1}{m(m-2)\ldots 2} \int (\mathrm{Cos}\,\varphi)^0 \,\Delta\varphi$$

wo der letzte Ausdruck $= \frac{(m-1)(m-3)\ldots 1}{m(m-2)\ldots 2}\varphi$ ist.

Z. B.

$$\int (\mathrm{Cos}\,\varphi)^6 \,\Delta\varphi = \tfrac{1}{6} (\mathrm{Cos}\,\varphi)^5 \,\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{5}{24} (\mathrm{Cos}\,\varphi)^3 \,\mathrm{Sin}\,\varphi$$
$$+ \tfrac{5}{16} (\mathrm{Cos}\,\varphi) \,\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{5}{16}\varphi$$
$$\int (\mathrm{Cos}\,\varphi)^{10} \,\Delta\varphi = \tfrac{1}{10} (\mathrm{Cos}\,\varphi)^9 \,\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{9}{80} (\mathrm{Cos}\,\varphi)^7 \,\mathrm{Sin}\,\varphi$$
$$+ \tfrac{21}{160} (\mathrm{Cos}\,\varphi)^5 \,\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{21}{128} (\mathrm{Cos}\,\varphi)^3 \,\mathrm{Sin}\,\varphi$$
$$+ \tfrac{63}{256} (\mathrm{Cos}\,\varphi) \,\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{63}{256}\varphi.$$

§. 79.

Bis jetzt ist vorausgesetzt, daß m und n positive Zahlen sind; nimmt man sie negativ an, so würden in den entwickelten Formeln die successiven Glieder eine immer höhere negative Zahl zum Exponenten bekommen, also immer weiter vom Zwecke abführen. Es ist jedoch leicht, auch für diese Fälle das Nöthige zu entwickeln.

Setzt man in die Formel III. für m den Werth $-m$, und $n = 0$, so hat man:

$$\int \frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m} + \frac{1}{m-1} \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-2}}$$

Durch fortgesetzte Reduction findet man:

$$\frac{m-2}{m-1} \int \frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-2}} = \frac{m-2}{(m-1)(m-3)} \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-3}}$$
$$+ \frac{(m-2)(m-4)}{(m-1)(m-3)} \int \frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-4}}$$

ferner:

$$\frac{(m-2)(m-4)}{(m-1)(m-3)} \int \frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-4}} = \frac{(m-2)(m-4)}{(m-1)(m-3)(m-5)} \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-5}}$$
$$+ \frac{(m-2)(m-4)(m-6)}{(m-1)(m-3)(m-5)} \int \frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-6}}$$

folglich hat man:

$$\int \frac{\Delta \varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m} = \frac{1}{m-1}\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}} + \frac{(m-2)}{(m-1)(m-3)}\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-3}}$$
$$+ \frac{(m-2)(m-4)}{(m-1)(m-3)(m-5)}\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-5}}$$
$$+ \frac{(m-2)(m-4)(m-6)}{(m-1)(m-3)(m-5)}\int\frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-6}}.$$

Man wird allgemein nach r Reductionen auf den Ausdruck:

$$\int \frac{\Delta \varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m} = \frac{1}{m-1}\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}}$$
$$+ \frac{(m-2)}{(m-1)(m-3)}\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-3}} + \ldots$$
$$\frac{(m-2)(m-4)\ldots(m-(2r-2))}{(m-1)(m-3)\ldots(m-(2r-1))}\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-(2r-1)}}$$
$$+ \frac{(m-2)(m-4)\ldots(m-2r)}{(m-1)(m-3)\ldots(m-(2r-1))}\int\frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-2r}}$$

oder:

$$\int[\mathrm{Sec}\,\varphi]^m\,\Delta\varphi = \mathrm{Sin}\,\varphi\Big[\frac{1}{m-1}[\mathrm{Sec}\,\varphi]^{m-1}$$
$$+ \frac{(m-2)}{(m-1)(m-3)}[\mathrm{Sec}\,\varphi]^{m-3}\ldots$$
$$+ \frac{(m-2)\ldots(m-(2r-2))}{(m-1)\ldots(m-(2r-1))}[\mathrm{Sec}\,\varphi]^{m-(2r-1)}\Big]$$
$$+ \frac{(m-2)\ldots(m-2r)}{(m-1)\ldots(m-(2r-1))}\int[\mathrm{Sec}\,\varphi]^{m-2r}\,\Delta\varphi$$

gekommen seyn.

Ist m eine paare Zahl, so kann man $m = 2r$, oder $r = \frac{m}{2}$ setzen, wodurch die letzte Integrande von selbst wegfällt. Alsdann hat man:

$$\int[\mathrm{Sec}\,\varphi]^m\,\Delta\varphi = \mathrm{Sin}\,\varphi\Big[\frac{1}{m-1}[\mathrm{Sec}\,\varphi]^{m-1}$$
$$+ \frac{(m-2)}{(m-1)(m-3)}[\mathrm{Sec}\,\varphi]^{m-3}\ldots\frac{(m-2)\ldots 2}{(m-1)\ldots 1}[\mathrm{Sec}\,\varphi]^1\Big]$$

z. B.

$$\int \frac{\Delta \varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^6} = [\mathrm{Sec}\,\varphi]^6 \Delta \varphi = \mathrm{Sin}\,\varphi \left[\tfrac{1}{5}[\mathrm{Sec}\,\varphi]^5 + \tfrac{4}{15}[\mathrm{Sec}\,\varphi]^3 + \tfrac{8}{15}\,\mathrm{Sec}\,\varphi\right]$$

$$\int \frac{\Delta \varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^8} = \int [\mathrm{Sec}\,\varphi]^8 \,\Delta \varphi = \mathrm{Sin}\,\varphi \left[\tfrac{1}{7}[\mathrm{Sec}\,\varphi]^7 + \tfrac{6}{35}[\mathrm{Sec}\,\varphi]^5 + \tfrac{8}{35}[\mathrm{Sec}\,\varphi]^3 + \tfrac{16}{35}\,\mathrm{Sec}\,\varphi\right]$$

Ist aber m eine unpaare Zahl, so kann man die Reduction soweit fortführen, bis $m-2r = 1$, oder $r = \frac{m-1}{2}$ ist, wodurch der letzte Theil, oder die Integrande $\int \frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]}{\Delta \varphi} = \int [\mathrm{Sec}\,\varphi] \,\Delta \varphi$ wird. Man erhält demnach:

$$\int [\mathrm{Sec}\,\varphi]^m \Delta \varphi = \mathrm{Sin}\,\varphi \left[\frac{1}{m-1}[\mathrm{Sec}\,\varphi]^{m-1} + \frac{(m-2)}{(m-1)(m-3)}[\mathrm{Sec}\,\varphi]^{m-3} + \ldots + \frac{(m-2)(m-4)\ldots 3}{(m-1)(m-3)\ldots 2}[\mathrm{Sec}\,\varphi]^2\right] + \frac{(m-2)(m-4)\ldots 1}{(m-1)(m-3)\ldots 2}\int [\mathrm{Sec}\,\varphi]\,\Delta \varphi.$$

Um $\int \frac{\Delta \varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} = \int \mathrm{Sec}\,\varphi \,\Delta \varphi$ zu erhalten, bemerke man, daß man habe:

$$\int \frac{\Delta \varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} = \int \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi \,\Delta \varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} = \int \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi \,\Delta \varphi}{1-[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2} = \int \frac{d\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{1-[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2}$$

Zerlegt man $1 - [\mathrm{Sin}\,\varphi]^2$ in zwei Factoren, so hat man $1 - [\mathrm{Sin}\,\varphi]^2 = (1 - \mathrm{Sin}\,\varphi)(1 + \mathrm{Sin}\,\varphi)$, folglich zerlegt sich der Bruch $\frac{1}{1-[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2}$ in die zwei Partialbrüche: $\frac{A}{1-\mathrm{Sin}\,\varphi} + \frac{B}{1+\mathrm{Sin}\,\varphi}$. Um A zu finden, substituirt man in $\frac{1}{1+\mathrm{Sin}\,\varphi}$ für $\mathrm{Sin}\,\varphi$ den Werth 1, wodurch man erhält $A = \frac{1}{2}$. Um B zu bestimmen, setzt man in $\frac{1}{1-\mathrm{Sin}\,\varphi}$ für $\mathrm{Sin}\,\varphi$ den Werth -1, wodurch man $B = \frac{1}{2}$ findet; folglich ist:

$$\frac{1}{1-[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2} = \frac{1}{2(1-\mathrm{Sin}\,\varphi)} + \frac{1}{2(1+\mathrm{Sin}\,\varphi)}$$

und daher:

$$\int \frac{\Delta\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi} = \int \frac{d\operatorname{Sin}\varphi}{1-[\operatorname{Sin}\varphi]^2} = \tfrac{1}{2}\int \frac{d\operatorname{Sin}\varphi}{1-\operatorname{Sin}\varphi} + \tfrac{1}{2}\int \frac{d\operatorname{Sin}\varphi}{1+\operatorname{Sin}\varphi}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\log(1-\operatorname{Sin}\varphi) + \tfrac{1}{2}\log(1+\operatorname{Sin}\varphi)$$

$$= \tfrac{1}{2}\log\frac{1+\operatorname{Sin}\varphi}{1-\operatorname{Sin}\varphi} = \log\sqrt{\left(\frac{1+\operatorname{Sin}\varphi}{1-\operatorname{Sin}\varphi}\right)}$$

$$= \log\operatorname{Tang}(\pi + \tfrac{1}{2}\varphi)$$

z. B.

$$\int \frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Cos}\varphi]^5} = \int[\operatorname{Sec}\varphi]^5\,\Delta\varphi = \operatorname{Sin}\varphi\,[\tfrac{1}{4}[\operatorname{Sec}\varphi]^4 + \tfrac{3}{8}[\operatorname{Sec}\varphi]^2 + \tfrac{3}{8}\log\operatorname{Tang}(\pi + \tfrac{1}{2}\varphi)]$$

$$\int \frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Cos}\varphi]^7} = \int[\operatorname{Sec}\varphi]^7\,\Delta\varphi = \operatorname{Sin}\varphi\,[\tfrac{1}{6}[\operatorname{Sec}\varphi]^6 + \tfrac{5}{24}[\operatorname{Sec}\varphi]^4 + \tfrac{5}{16}[\operatorname{Sec}\varphi]^2 + \tfrac{5}{16}\log\operatorname{Tang}(\pi + \tfrac{1}{2}\varphi)]$$

§. 80.

Eine ähnliche Formel läßt sich für $\int \frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Sin}\varphi]^n} = \int[\operatorname{Cosec}\varphi]^n\,\Delta\varphi$ ableiten. Setzt man nemlich in die Formel I. des §. 76. für n den Werth $-$ n und m $= 0$, so erhält man:

$$\int \frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Sin}\varphi]^n} = \frac{\operatorname{Cos}\varphi}{(1-n)[\operatorname{Sin}\varphi]^{n-1}} + \frac{-n+2}{-n+1}\int \frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Sin}\varphi]^{n-2}}$$

d. h.

$$\int \frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Sin}\varphi]^n} = -\frac{1}{n-1}\,\frac{\operatorname{Cos}\varphi}{[\operatorname{Sin}\varphi]^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Sin}\varphi]^{n-2}}$$

Wendet man diese Reductionsformel auf den zweiten Theil an, so ist:

$$\frac{n-2}{n-1}\int \frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Sin}\varphi]^{n-2}} = -\frac{n-2}{(n-1)(n-3)}\,\frac{\operatorname{Cos}\varphi}{[\operatorname{Sin}\varphi]^{n-3}} + \frac{(n-2)(n-4)}{(n-1)(n-3)}\int \frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Sin}\varphi]^{n-4}}$$

ferner:

$$\frac{(n-2)(n-4)}{(n-1)(n-3)}\int \frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Sin}\varphi]^{n-4}} = -\frac{(n-2)(n-4)}{(n-1)(n-3)(n-5)}\,\frac{\operatorname{Cos}\varphi}{[\operatorname{Sin}\varphi]^{n-5}} + \frac{(n-2)(n-4)(n-6)}{(n-1)(n-3)(n-5)}\int \frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Sin}\varphi]^{n-6}}$$

Man hat daher zuerst:

$$\int \frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n} = -\frac{1}{n-1}\,\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}} - \frac{n-2}{(n-1)(n-3)}\,\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-3}}$$
$$-\frac{(n-2)(n-4)}{(n-1)(n-3)(n-5)}\,\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-5}}$$
$$+\frac{(n-2)(n-4)(n-6)}{(n-1)(n-3)(n-5)}\int\frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-6}}$$

Man wird allgemein nach der rten Reduction auf den Ausdruck:

$$\int \frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n} = -\frac{1}{n-1}\,\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}} - \frac{(n-2)}{(n-1)(n-3)}\,\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-3}}\ldots$$
$$-\frac{(n-2)(n-4)\ldots(n-(2r-2))}{(n-1)(n-3)\ldots(n-(2r-1))}\,\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-(2r-1)}}$$
$$+\frac{(n-2)(n-4)\ldots(n-2r)}{(n-1)(n-3)\ldots(n-(2r-1))}\int\frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-2r}}$$

kommen, welcher auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\int[\mathrm{Cosec}\,\varphi]^n\,\Delta\varphi = -\mathrm{Cos}\,\varphi\left[\frac{1}{n-1}\,[\mathrm{Cosec}\,\varphi]^{n-1}\right.$$
$$+\frac{n-2}{(n-1)(n-3)}\,[\mathrm{Cosec}\,\varphi]^{n-3}\ldots$$
$$\left.+\frac{(n-2)(n-4)\ldots(n-(2r-2))}{(n-1)(n-3)\ldots(n-(2r-1))}\,[\mathrm{Cosec}\,\varphi]^{n-(2r-1)}\right]$$
$$+\frac{(n-2)(n-4)\ldots(n-2r)}{(n-1)(n-3)\ldots(n-(2r-1))}\int\frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-2r}}$$

Ist n eine grade Zahl, so kann man $2r = n$ oder $r = \frac{n}{2}$ setzen, d. h. bis zur $\frac{1}{2}n$ten Reduction fortschreiten, wodurch die Integrande von selbst wegfällt. Man hat also in diesem Falle:

$$\int\frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n} = \int[\mathrm{Cosec}\,\varphi]^n\,\Delta\varphi = -\mathrm{Cos}\,\varphi\left[\frac{1}{n-1}\,[\mathrm{Cosec}\,\varphi]^{n-1}\right.$$
$$\left.+\frac{n-2}{(n-1)(n-3)}\,[\mathrm{Cosec}\,\varphi]^{n-3}\ldots + \frac{(n-2)(n-4)\ldots4.2}{(n-1)(n-3)\ldots3.1}\,[\mathrm{Cosec}\,\varphi]^{1}\right]$$

Z. B. Es ist:

$$\int [\mathrm{Cosec}\,\varphi]^6 \,\Delta\varphi = -\mathrm{Cos}\,\varphi.\,[\tfrac{1}{5}[\mathrm{Cosec}\,\varphi]^5 + \tfrac{4}{15}[\mathrm{Cosec}\,\varphi]^3 + \tfrac{8}{15}[\mathrm{Cosec}\,\varphi]]$$

$$\int [\mathrm{Cosec}\,\varphi]^{10} \,\Delta\varphi = -\mathrm{Cos}\,\varphi\,[\tfrac{1}{9}[\mathrm{Cosec}\,\varphi]^9 + \tfrac{8}{63}[\mathrm{Cosec}\,\varphi]^7 + \tfrac{16}{105}[\mathrm{Cosec}\,\varphi]^5 + \tfrac{64}{315}[\mathrm{Cosec}\,\varphi]^3 + \tfrac{128}{315}[\mathrm{Cosec}\,\varphi]]$$

Ist aber n eine unpaare Zahl, so kann man offenbar mit der Reduction so weit fortschreiten, bis $n-2r = 1$ also $r = \frac{n-1}{2}$ ist, alsdann wird der letzte Theil, oder die Integrande: $\int \frac{\Delta\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi}$. Man hat also für diesen Fall:

$$\int [\mathrm{Cosec}\,\varphi]^n \,\Delta\varphi = -\mathrm{Cos}\,\varphi\,\Big[\frac{1}{n-1}[\mathrm{Cosec}\,\varphi]^{n-1} + \frac{n-2}{(n-1)(n-3)}[\mathrm{Cosec}\,\varphi]^{n-3}\ldots + \frac{(n-2)(n-4)\ldots 3}{(n-1)(n-3)\ldots 2}[\mathrm{Cosec}\,\varphi]^2\Big] + \frac{(n-2)(n-4)\ldots 1}{(n-1)(n-3)\ldots 2}\int \frac{\Delta\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi}$$

Um aber $\int \frac{\Delta\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi}$ zu erhalten, hat man:

$\int \frac{\Delta\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi} = \int \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi\,\Delta\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi^2} = -\int \frac{d\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{1-[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2}$. Zerlegt man den Bruch $\frac{1}{1-[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2}$ in zwei Partialbrüche, so hat man:

$\frac{1}{1-[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} = \frac{1}{2(1+\mathrm{Cos}\,\varphi)} + \frac{1}{2(1-\mathrm{Cos}\,\varphi)}$, folglich ist:

$$-\int \frac{d\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{1-[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} = -\tfrac{1}{2}\int \frac{d\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{1+\mathrm{Cos}\,\varphi} - \tfrac{1}{2}\int \frac{d\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{1-\mathrm{Cos}\,\varphi}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\log(1+\mathrm{Cos}\,\varphi) + \tfrac{1}{2}\log(1-\mathrm{Cos}\,\varphi)$$

$$= \tfrac{1}{2}\log\frac{1-\mathrm{Cos}\,\varphi}{1+\mathrm{Cos}\,\varphi} = \log\sqrt{\left(\frac{1-\mathrm{Cos}\,\varphi}{1+\mathrm{Cos}\,\varphi}\right)}$$

$= \log\mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi$ d. h. es ist

$$\int \frac{\Delta\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi} = \int [\mathrm{Cosec}\,\varphi]\,\Delta\varphi = \log\mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi$$

Z. B. Es ist:

$$\int [\mathrm{Cosec}\,\varphi]^5 \,\Delta\varphi = -\mathrm{Cos}\,\varphi\,[\tfrac{1}{4}[\mathrm{Cosec}\,\varphi]^4 + \tfrac{3}{8}[\mathrm{Cosec}\,\varphi]^2 + \tfrac{3}{8}\log\mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi]$$

$$\int [\mathrm{Cosec}\,\varphi]^7 \,\Delta\varphi = -\mathrm{Cos}\,\varphi\,[\tfrac{1}{6}[\mathrm{Cosec}\,\varphi]^6 + \tfrac{5}{24}[\mathrm{Cosec}\,\varphi]^4 + \tfrac{5}{16}[\mathrm{Cosec}\,\varphi]^2 + \tfrac{5}{16}\log\mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi$$

§. 81.

Reducirt man die Formel II. §. 76:

$$\int [\mathrm{Sin}\,\varphi]^n [\mathrm{Cos}\,\varphi]^m \triangle\varphi = -\frac{1}{m+n}[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m+1}$$
$$+\frac{n-1}{m+n}\int [\mathrm{Cos}\,\varphi]^m [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-2}\triangle\varphi.$$

so hat man:

$$\frac{n-1}{m+n}\int [\mathrm{Cos}\,\varphi]^m [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-2}\triangle\varphi$$
$$= -\frac{n-1}{(m+n)(m+n-2)}[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{m-3}[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m+1}$$
$$+\frac{(n-1)(n-3)}{(m+n)(m+n-2)}\int [\mathrm{Cos}\,\varphi]^m [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-4}\triangle\varphi$$

folglich ist:

$$\int [\mathrm{Sin}\,\varphi]^n [\mathrm{Cos}\,\varphi]^m \triangle\varphi = -\frac{1}{m+n}[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m+1}$$
$$-\frac{n-1}{(m+n)(m+n-2)}[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{m-3}[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m+1}$$
$$+\frac{(n-1)(n-3)}{(m+n)(m+n-2)}\int [\mathrm{Cos}\,\varphi]^m [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-4}\triangle\varphi$$

Man erhält allgemein nach r Reductionen den Ausdruck:

$$\int [\mathrm{Sin}\,\varphi]^n [\mathrm{Cos}\,\varphi]^m \triangle\varphi = -\frac{1}{m+n}[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m+1}$$
$$-\frac{n-1}{(m+n)(m+n-2)}[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-3}[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m+1}$$
$$\ldots -\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-(2r-3))}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+n-(2r-2))}[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-(2r-1)}[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m+1}$$
$$+\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-(2r-1))}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+n-(2r-2))}\int [\cos\varphi]^m [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-2r}\triangle\varphi$$

Ist n eine ungrade Zahl, so wird endlich ein Glied kommen, dessen Coefficient $= 0$ wird. Ist nämlich $n-(2r-1) = 0$, oder $r = \frac{n+1}{2}$, so hat man:

$$\int [\mathrm{Sin}\,\varphi]^n [\mathrm{Cos}\,\varphi]^m \triangle\varphi = -[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m+1}\Big[\frac{1}{m+n}[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}$$
$$+\frac{n-1}{(m+n)(m+n-2)}[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-3}\ldots\frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+1)}[\mathrm{Sin}\,\varphi]^0\Big]$$

wo die Integrande von selbst wegfällt.

Z. B. Es ist:

$$\int [\mathrm{Cos}\,\varphi]^2 [\mathrm{Sin}\,\varphi]^3 \triangle\varphi = -[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3 \big(\tfrac{1}{5}[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2 + \tfrac{2}{15}[\mathrm{Sin}\,\varphi]^0\big)$$

Ist aber n eine grade Zahl, und setzt man $2r = n$ oder $r = \frac{n}{2}$, d. h. treibt die Reduction bis zur $\frac{n}{2}$ten, so sind die beiden letzten Theile:

$$- \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+2)} [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m+1} [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{1}$$
$$+ \frac{(n-1)(n-3)\ldots 1}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+2)} \int [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m} \triangle \varphi$$

wo man $\int [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m} \triangle \varphi$ nach dem Vorhergehenden findet. Die Formel ist also:

$$\int [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m} [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n} \triangle \varphi = - [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m+1} \Big[\frac{1}{m+n} [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}$$
$$+ \frac{(n-1)}{(m+n)(m+n-2)} [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-3} \ldots + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+2)} \mathrm{Sin}\,\varphi\Big]$$
$$+ \frac{(n-1)(n-3)\ldots 1}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+2)} \int [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m} \triangle \varphi$$

z. B.

$$\int [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{2} [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{4} \triangle \varphi = - [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{3} \big(\tfrac{1}{6} [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{3}$$
$$+ \tfrac{5}{24} [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{1}\big) + \tfrac{5}{24} \int [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{2} \triangle \varphi$$
$$= - [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{3} \big(\tfrac{1}{6} [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{3} + \tfrac{5}{24} [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{1}\big) + \tfrac{5}{48} \mathrm{Cos}\,\varphi + \tfrac{5}{48}\,\varphi.$$

§. 82.

Wir fanden §. 26. die Formel:

$$\int [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n} [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m} \triangle \varphi = \frac{1}{m+n} [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1} [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n+1}$$
$$+ \frac{m-1}{m+n} \int [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n} [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-2} \triangle \varphi$$

Wendet man diese Regel der Reduction auf den zweiten Theil an, so ist:

$$\frac{m-1}{m+n} \int [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n} [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-2} \triangle \varphi$$
$$= \frac{m-1}{m+n} \cdot \frac{1}{m+n-2} [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-3} [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n+1}$$
$$+ \frac{m-1}{m+n} \cdot \frac{m-3}{m+n-2} \int [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n} [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-4} \triangle \varphi$$

Ferner hat man:

$$\frac{(m-1)(m-3)}{(m+n)(m+n-2)} \int [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n} [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-4} \triangle \varphi$$
$$= \frac{(m-1)(m-3)}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)} [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-5} [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n+1}$$
$$+ \frac{(m-1)(m-3)(m-5)}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)} \int [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n} [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-6} \triangle \varphi$$

Also hat man zunächst:

$$\int [\mathrm{Sin}\,\varphi]^n [\mathrm{Cos}\,\varphi]^m \triangle\varphi = \frac{1}{m+n} [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n+1} [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}$$
$$+ \frac{m-1}{(m+n)(m+n-2)} [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-3} [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n+1}$$
$$+ \frac{(m-1)(m-3)}{(m+n)(m+n-2)(m+n-3)} [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-5} [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n+1}$$
$$+ \frac{(m-1)(m-3)(m-5)}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)} \int [\mathrm{Sin}\,\varphi]^n [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-6}$$

Auf diese Art fortfahrend, erhält man allgemein nach r Reductionen:

$$\int [\mathrm{Sin}\,\varphi]^n [\mathrm{Cos}\,\varphi]^m \triangle\varphi = [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n+1} \Big(\frac{1}{h} [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}$$
$$+ \frac{m-1}{h(h-2)} [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-3}$$
$$\ldots + \frac{(m-1)(m-3)\ldots(m-(2r-3))}{h(h-2)\ldots(h-(2r-2))} [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-(2r-1)}\Big)$$
$$+ \frac{(m-1)(m-3)\ldots(m-(2r-1))}{h(h-2)\ldots(h-(2r-2))} \int [\mathrm{Sin}\,\varphi]^n [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-2r} \triangle\varphi$$

wenn man $m+n$ der Kürze wegen $=h$ setzt. Ist hier m eine ungrade Zahl, so wird die Formel von selbst abbrechen, denn alsdann kann man $m=2r-1$ annehmen, so, daß $r=\frac{m+1}{2}$ wird, wodurch die Formel in folgende übergehet:

$$\int [\mathrm{Cos}\,\varphi]^m [\mathrm{Sin}\,\varphi]^n \triangle\varphi = [\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n+1} \Big(\frac{1}{h} [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}$$
$$+ \frac{m-1}{h(h-2)} [\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-3}$$
$$\ldots \frac{(m-1)(m-3)\ldots 2}{h(h-2)\ldots(n+1)} [\mathrm{Cos}\,\varphi]^0\Big)$$

wobei die Integrande wegen des zu 0 werdenden Factors wegfällt.

Z. B. Es ist:

$$\int [\mathrm{Cos}\,\varphi]^5 [\mathrm{Sin}\,\varphi]^4 \triangle\varphi = [\mathrm{Sin}\,\varphi]^5 \Big(\tfrac{1}{9} [\mathrm{Cos}\,\varphi]^4 + \tfrac{4}{63} [\mathrm{Cos}\,\varphi]^2 + \tfrac{8}{315}\Big)$$
$$\int [\mathrm{Cos}\,\varphi]^7 [\mathrm{Sin}\,\varphi]^3 \triangle\varphi = [\mathrm{Sin}\,\varphi]^4 \Big(\tfrac{1}{10} [\mathrm{Cos}\,\varphi]^6 + \tfrac{3}{40} [\mathrm{Cos}\,\varphi]^4 + \tfrac{1}{20} [\mathrm{Cos}\,\varphi]^2 + \tfrac{1}{40}\Big)$$

Ist aber m eine grade Zahl, so kann man $m=2r$ oder $r=\frac{1}{2}m$ setzen, d. h. die Reduction bis zur $\frac{1}{2}$mten fortführen, wodurch die Formel die Gestalt:

$$\int [\text{Cos}\,\varphi]^m [\text{Sin}\,\varphi]^n \,\Delta\varphi = [\text{Sin}\,\varphi]^{n+1} \left(\frac{1}{h} [\text{Gos}\,\varphi]^{m-1} \right.$$
$$+ \frac{m-1}{h(h-2)} [\text{Cos}\,\varphi]^{m-3}$$
$$\left. \ldots \frac{(m-1)(m-3)\ldots 3}{h(h-2)\ldots(n+2)} [\text{Cos}\,\varphi]^1 \right) + \frac{(m-1)(m-3)\ldots 1}{h(h-2)\ldots(n+2)} \int [\text{Sin}\,\varphi]^n \,\Delta\varphi$$

annimmt, wo $\int [\text{Sin}\,\varphi]^n \,\Delta\,\varphi$ nach dem Vorhergehenden gefunden werden kann.

Z. B. Es ist:

$$\int [\text{Cos}\,\varphi]^2 [\text{Sin}\,\varphi]^6 \,\Delta\,\varphi = \tfrac{1}{8} [\text{Sin}\,\varphi]^7 \,\text{Cos}\,\varphi + \tfrac{1}{8} \int [\text{Sin}\,\varphi]^6 \,\Delta\,\varphi$$
$$= \tfrac{1}{8} [\text{Sin}\,\varphi]^7 \,\text{Cos}\,\varphi + \tfrac{1}{8} \left(-\tfrac{1}{6} [\text{Sin}\,\varphi]^5 [\text{Cos}\,\varphi] \right.$$
$$\left. + \tfrac{5}{24} [\text{Sin}\,\varphi]^3 [\text{Cos}\,\varphi] - \tfrac{5}{16} \,\text{Sin}\,\varphi \,\text{Cos}\,\varphi + \tfrac{5}{16}\varphi \right)$$
$$= \tfrac{1}{8} [\text{Cos}\,\varphi] \left([\text{Sin}\,\varphi]^7 - [\text{Sin}\,\varphi]^5 - \tfrac{5}{24} [\text{Sin}\,\varphi]^3 \right.$$
$$\left. - \tfrac{5}{16} \,\text{Sin}\,\varphi \right) + \tfrac{5}{128}\,\varphi$$

§. 83.

Bis jetzt ist vorausgesetzt worden, daß m und n ganze positive Zahlen sind; ist aber m oder n, oder sind beide negativ, in welchen Fällen man die Ausdrücke

$$\int \frac{[\text{Sin}\,\varphi]^n}{[\text{Cos}\,\varphi]^m} \,\Delta\varphi, \quad \int \frac{[\text{Cos}\,\varphi]^m}{[\text{Sin}\,\varphi]^n} \,\Delta\varphi, \quad \int \frac{\Delta\,\varphi}{[\text{Sin}\,\varphi]^n [\text{Cos}\,\varphi]^m}$$

erhält, auf welche sich also die übrigen trigonometrischen Ausdrücke, als $\int [\text{Tang}\,\varphi]^n \,\Delta\,\varphi$, $\int [\text{Cotang}\,\varphi]^n \,\Delta\,\varphi$ etc. zurückbringen lassen; so sind noch eigne Reductionen erfoderlich, welche aber leicht abgeleitet werden können.

Sucht man das Integral von $[\text{Tang}\,\varphi]^m \,\Delta\,\varphi$, so bemerke man, daß man habe:

$$d \frac{[\text{Sin}\,\varphi]^m}{[\text{Cos}\,\varphi]^m} = d\,[\text{Tang}\,\varphi]^m = m [\text{Tang}\,\varphi]^{m-1} \,d\,\text{Tang}\,\varphi$$
$$= m [\text{Tang}\,\varphi]^{m-1} \frac{\Delta\,\varphi}{[\text{Cos}\,\varphi]^2} = \frac{m . [\text{Sin}\,\varphi]^{m-1} \,\Delta\,\varphi}{[\text{Cos}\,\varphi]^{m+1}}$$

also hat man:

$$\int \frac{[\text{Sin}\,\varphi]^{m-1} \,\Delta\,\varphi}{[\text{Cos}\,\varphi]^{m+1}} = \frac{1}{m} \frac{[\text{Sin}\,\varphi]^m}{[\text{Cos}\,\varphi]^m}$$

oder für m den Werth m−1 gesetzt, ist,

$$\int \frac{[\text{Sin}\,\varphi]^{m-2} \,\Delta\,\varphi}{[\text{Cos}\,\varphi]^m} = \frac{1}{m-1} \frac{[\text{Sin}\,\varphi]^{m-1}}{[\text{Cos}\,\varphi]^{m-1}}$$

Nun ist aber:

$$\int \frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^m}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m} \triangle\varphi = \int \frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{m-2}\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2 \triangle\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m}$$

$$= \int \frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{m-2}\,(1-[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2) \triangle\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m}$$

$$= \int \frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{m-2} \triangle\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m} - \int \frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{m-2} \triangle\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-2}}$$

also:

$$\int \frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^m}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m} \triangle\varphi = \frac{1}{m-1}\,\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{m-1}}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}} - \int \frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{m-2} \triangle\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-2}}$$

d. h.

$$\int [\mathrm{Tang}\,\varphi]^m \triangle\varphi = \frac{1}{m-1}\,[\mathrm{Tang}\,\varphi]^{m-1} - \int [\mathrm{Tang}]^{m-2} \triangle\varphi$$

Wendet man diese Reduction auf den zweiten Theil an, so hat man:

$$-\int [\mathrm{Tang}\,\varphi]^{m-2} \triangle\varphi = -\frac{1}{m-3}\,[\mathrm{Tang}\,\varphi]^{m-3} + \int [\mathrm{Tang}\,\varphi]^{m-4} \triangle\varphi$$

also zunächst:

$$\int [\mathrm{Tang}\,\varphi]^m \triangle\varphi = \frac{1}{m-1}\,[\mathrm{Tang}\,\varphi]^{m-1} - \frac{1}{m-3}\,[\mathrm{Tang}\,\varphi]^{m-3} + \int [\mathrm{Tang}\,\varphi]^{m-4} \triangle\varphi$$

Man gelangt allgemein nach r Reductionen auf den Ausdruck:

$$\int [\mathrm{Tang}\,\varphi]^m \triangle\varphi = \frac{1}{m-1}[\mathrm{Tang}\,\varphi]^{m-1} - \frac{1}{m-3}[\mathrm{Tang}\,\varphi]^{m-3} \ldots (-1)^{r-1}\,\frac{1}{m-(2r-1)}\,[\mathrm{Tang}\,\varphi]^{m-(2r-1)} + (-1)^r \int [\mathrm{Tang}\,\varphi]^{m-2r} \triangle\varphi$$

Ist hier m eine paare Zahl, so kann man $m = 2r$ oder $r = \frac{1}{2}m$ setzen, d. h. bis zur $\frac{1}{2}$mten Reduction fortschreiten, in welchem Falle man haben wird:

$$\int [\mathrm{Tang}\,\varphi]^m \triangle\varphi = \frac{1}{m-1}[\mathrm{Tang}\,\varphi]^{m-1} - \frac{1}{m-3}[\mathrm{Tang}\,\varphi]^{m-3} \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}m-1}\,\mathrm{Tang}\,\varphi + (-1)^{\frac{1}{2}m}\,\varphi$$

z. B.

$$\int [\mathrm{Tang}\,\varphi]^8 \triangle\varphi = \tfrac{1}{7}[\mathrm{Tang}\,\varphi]^7 - \tfrac{1}{5}[\mathrm{Tang}\,\varphi]^5 + \tfrac{1}{3}[\mathrm{Tang}\,\varphi]^3 - \mathrm{Tang}\,\varphi + \varphi$$

Ist aber m eine unpaare Zahl, so kann man $m-2r=1$ oder $r=\frac{m-1}{2}$ setzen, wodurch der letzte Theil in $\int \text{Tang}\,\varphi\,\Delta\varphi$ übergehet, und man hat alsdann

$$\int [\text{Tang}\,\varphi]^m\,\Delta\varphi = \frac{1}{m-1}[\text{Tang}\,\varphi]^{m-1} - \frac{1}{m-3}[\text{Tang}\,\varphi]^{m-3}$$

$$\ldots (-1)^{\frac{m-3}{2}} \cdot \tfrac{1}{2}[\text{Tang}\,\varphi]^2 + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \int \text{Tang}\,\varphi\,\Delta\varphi$$

Nun ist aber: $\int \text{Tang}\,\varphi\,\Delta\varphi = -\int \frac{d\,\text{Cos}\,\varphi}{\text{Cos}\,\varphi}$

$$= -\log \text{Cos}\,\varphi = \log \text{Sec.}\,\varphi$$

wodurch also auch der letzte Theil der Formel zur Integration gebracht ist.

Z. B.

$$\int [\text{Tang}\,\varphi]^7\,\Delta\varphi = \tfrac{1}{6}[\text{Tang}\,\varphi]^6 - \tfrac{1}{4}[\text{Tang}\,\varphi]^4 + \tfrac{1}{2}[\text{Tang}\,\varphi]^2 + \log \text{Cos}\,\varphi$$

§. 84.

Ist aber der Ausdruck $\frac{[\text{Cos}\,\varphi]^m\,\Delta\varphi}{[\text{Sin}\,\varphi]^m}$ zu integriren, so hat man:

$$d\,[\text{Cot.}\,\varphi]^m = m\,[\text{Cot.}\,\varphi]^{m-1}\ d\,\text{Cot.}\,\varphi$$

$$= -m\,[\text{Cot.}\,\varphi]^{m-1}\frac{\Delta\varphi}{[\text{Sin}\,\varphi]^2} = -m\,\frac{[\text{Cos}\,\varphi]^{m-1}\,\Delta\varphi}{[\text{Sin}\,\varphi]^{m+1}}$$

daher ist:

$$\int \frac{[\text{Cos}\,\varphi]^{m-1}\,\Delta\varphi}{[\text{Sin}\,\varphi]^{m+1}} = -\frac{1}{m}\,\frac{[\text{Cos}\,\varphi]^m}{[\text{Sin}\,\varphi]^m} \text{ oder:}$$

$$\int \frac{[\text{Cos}\,\varphi]^{m-2}\,\Delta\varphi}{[\text{Sin}\,\varphi]^m} = -\frac{1}{m-1}\,\frac{[\text{Cos}\,\varphi]^{m-1}}{[\text{Sin}\,\varphi]^{m-1}}$$

Nun ist aber:

$$\int \frac{(\text{Cos}\,\varphi)^m\,\Delta\varphi}{(\text{Sin}\,\varphi)^m} = \int \frac{(\text{Cos}\,\varphi)^{m-2}(\text{Cos}\,\varphi)^2\,\Delta\varphi}{(\text{Sin}\,\varphi)^m}$$

$$= \int \frac{(\text{Cos}\,\varphi)^{m-2}}{(\text{Sin}\,\varphi)^m}\,\Delta\varphi - \int \frac{(\text{Cos}\,\varphi)^{m-2}\,\Delta\varphi}{(\text{Sin}\,\varphi)^{m-2}}$$

Setzt man für $\int \frac{(\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-2}\,\Delta\varphi}{(\mathrm{Sin}\,\varphi)^m}$ den oben gefundenen Werth, so hat man:

$$\int \frac{(\mathrm{Cos}\,\varphi)^m\,\Delta\varphi}{(\mathrm{Sin}\,\varphi)^m} = -\frac{1}{m-1}\,\frac{(\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-1}}{(\mathrm{Sin}\,\varphi)^{m-1}} - \int \frac{(\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-2}\,\Delta\varphi}{(\mathrm{Sin}\,\varphi)^{m-2}}$$

d. h.

$$\int (\mathrm{Cot}\,\varphi)^m\,\Delta\varphi = -\frac{1}{m-1}(\mathrm{Cot}\,\varphi)^{m-1} - \int (\mathrm{Cot}\,\varphi)^{m-2}\,\Delta\varphi$$

Unterwirft man den zweiten Theil dieser Formel derselben Reduction, so hat man:

$$-\int \mathrm{Cot}\,\varphi)^{m-2}\,\Delta\varphi = \frac{1}{m-3}(\mathrm{Cot}\,\varphi)^{m-3} - \int (\mathrm{Cot}\,\varphi)^{m-4}\,\Delta\varphi$$

Man erhält allgemein nach r Reductionen:

$$\int (\mathrm{Cot}\,\varphi)^m\,\Delta\varphi = -\frac{1}{m-1}(\mathrm{Cot}\,\varphi)^{m-1}$$

$$+\frac{1}{m-3}(\mathrm{Cot}\,\varphi)^{m-3}\ldots(-1)^r\,\frac{1}{m-(2r-1)}(\mathrm{Cot}\,\varphi)^{m-(2r-1)}$$

$$+(-1)^r\int(\mathrm{Cot}\,\varphi)^{m-2r}\,\Delta\varphi$$

Ist hier m eine grade Zahl, so kann man $m-2r=0$ oder $r=\frac{1}{2}m$ annehmen, d. h. bis zur $\frac{1}{2}$mten Reduction fortgehen, wodurch man erhält:

$$\int (\mathrm{Cot}\,\varphi)^m\,\Delta\varphi = -\frac{1}{m-1}(\mathrm{Cot}\,\varphi)^{m-1}$$

$$+\frac{1}{m-3}(\mathrm{Cot}\,\varphi)^{m-3}\ldots(-1)^{\frac{1}{2}m}\,\mathrm{Cot}\,\varphi + (-1)^{\frac{1}{2}m}\,\varphi$$

z. E.

$$\int (\mathrm{Cot}\,\varphi)^8\,\Delta\varphi = -\tfrac{1}{7}(\mathrm{Cot}\,\varphi)^7$$

$$+\tfrac{1}{5}(\mathrm{Cot}\,\varphi)^5 - \tfrac{1}{3}(\mathrm{Cot}\,\varphi)^3 + \mathrm{Cot}\,\varphi + \varphi$$

$$\int (\mathrm{Cot}\,\varphi)^6\,\Delta\varphi = -\tfrac{1}{5}(\mathrm{Cot}\,\varphi)^5 + \tfrac{1}{3}(\mathrm{Cot}\,\varphi)^3 - \mathrm{Cot}\,\varphi - \varphi$$

Ist aber m eine unpaare Zahl, so kann man $m-2r=1$ oder $r=\frac{m-1}{2}$ setzen, und man erhält:

$$\int (\mathrm{Cot}\,\varphi)^m\,\Delta\varphi = -\frac{1}{m-1}(\mathrm{Cot}\,\varphi)^{m-1} + \frac{1}{m-3}(\mathrm{Cot}\,\varphi)^{m-3}\ldots$$

$$+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\,\tfrac{1}{2}(\mathrm{Cot}\,\varphi)^2 + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\int \mathrm{Cot}\,\varphi\,\Delta\varphi$$

Nun ist aber:

$$\int \mathrm{Cot}\,\varphi\ \Delta\varphi = \int \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi\,\Delta\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi} = \int \frac{d\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi} = \log \mathrm{Sin}\,\varphi$$

z. B.

$$\int (\mathrm{Cot}\,\varphi)^7\ \Delta\varphi = -\tfrac{1}{6}(\mathrm{Cot}\,\varphi)^6 + \tfrac{1}{4}(\mathrm{Cot}\,\varphi)^4 - \tfrac{1}{2}(\mathrm{Cot}\,\varphi)^2 - \log \mathrm{Sin}\,\varphi$$

$$\int (\mathrm{Cot}\,\varphi)^5\ \Delta\varphi = -\tfrac{1}{4}(\mathrm{Cot}\,\varphi)^4 + \tfrac{1}{2}(\mathrm{Cot}\,\varphi)^2 + \log \mathrm{Sin}\,\varphi.$$

§. 85.

Setzt man in die Formel II. §. 76. für m den Werth $-m$, so erhält man:

$$\int \frac{(\mathrm{Sin}\,\varphi)^n\ \Delta\varphi}{(\mathrm{Cos}\,\varphi)^m} = -\frac{1}{n-m}\,\frac{(\mathrm{Sin}\,\varphi)^{n-1}}{(\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-1}} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{(\mathrm{Sin}\,\varphi)^{n-2}\ \Delta\varphi}{(\mathrm{Cos}\,\varphi)^m}$$

Reducirt man nach dieser Regel den zweiten Theil dieses Ausdrucks, so ist:

$$\frac{n-1}{n-m}\int \frac{(\mathrm{Sin}\,\varphi)^{n-2}\ \Delta\varphi}{(\mathrm{Cos}\,\varphi)^m} = -\frac{n-1}{(n-m)(n-m-2)}\,\frac{(\mathrm{Sin}\,\varphi)^{n-3}}{(\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-1}} + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-m)(n-m-2)}\int \frac{(\mathrm{Sin}\,\varphi)^{n-4}\ \Delta\varphi}{(\mathrm{Cos}\,\varphi)^m}$$

also hat man zunächst:

$$\int \frac{(\mathrm{Sin}\,\varphi)^n\ \Delta\varphi}{(\mathrm{Cos}\,\varphi)^m} = -\frac{1}{n-m}\,\frac{(\mathrm{Sin}\,\varphi)^{n-1}}{(\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-1}} - \frac{n-1}{(n-m)(n-m-2)}\,\frac{(\mathrm{Sin}\,\varphi)^{n-3}}{(\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-1}} + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-m)(n-m-2)}\int \frac{(\mathrm{Sin}\,\varphi)^{n-4}\ \Delta\varphi}{(\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-1}}$$

Allgemein, nach r Reductionen erhält man:

$$\int \frac{(\mathrm{Sin}\varphi)^n \Delta\varphi}{(\mathrm{Cos}\,\varphi)^m} = -\frac{1}{n-m}\frac{(\mathrm{Sin}\,\varphi)^{n-1}}{(\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-1}}$$

$$-\frac{n-1}{(n-m)(n-m-2)}\frac{(\mathrm{Sin}\,\varphi)^{n-3}}{(\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-1}}\ldots$$

$$-\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-(2r-3))}{(n-m)(n-m-2)\ldots(n-m-(2r-2))}\frac{(\mathrm{Sin}\,\varphi)^{n-(2r-1)}}{(\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-1}}$$

$$+\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-(2r-1))}{(n-m)\ldots(n-m-(2r-2))}\int\frac{(\mathrm{Sin}\,\varphi)^{n-2r}\Delta\varphi}{(\mathrm{Cos}\,\varphi)^m}$$

Ist hier n eine paare Zahl, so kann man $n-2r=0$ oder $r=\frac{1}{2}n$ setzen, oder bis zur $\frac{1}{2}$nten Reduction fortschreiten, wodurch man erhält:

$$\int\frac{(\mathrm{Sin}\,\varphi)^n \Delta\varphi}{(\mathrm{Cos}\,\varphi)^m} = -\frac{1}{n-m}\frac{(\mathrm{Sin}\,\varphi)^{n-1}}{(\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-1}}$$

$$-\frac{n-1}{(n-m)(n-m-2)}\frac{(\mathrm{Sin}\,\varphi)^{n-3}}{(\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-1}}\ldots$$

$$-\frac{(n-1)(n-3)\ldots 3}{(n-m)\ldots(2-m)}\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{(\mathrm{Cos}\,\varphi)^{m-1}}$$

$$+\frac{(n-1)(n-3)\ldots 1}{(n-m)\ldots(2-m)}\int\frac{\Delta\varphi}{(\mathrm{Cos}\,\varphi)^m}$$

z. B.

$$\int\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^6\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3} = -\frac{1}{3}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^5}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} - \frac{5}{3}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2}$$

$$+5\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} - 5\int\frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3}$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^5}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} - \frac{5}{3}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} + \frac{5}{2}\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} - \frac{1}{2}\int\frac{\Delta\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi}$$

ferner:

$$\int\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^4\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3} = -\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} + 3\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} - 3\int\frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3}$$

$$= -\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} + 3\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} - 3\left(\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{2[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} + \frac{1}{2}\int\frac{\Delta\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi}\right)$$

$$= -\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} + \frac{3}{2}\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} - \frac{3}{2}\int\frac{\Delta\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi}$$

Ist hier $n-m$ eine positive grade Zahl, so wird in dieser Formel endlich ein Glied kommen müssen, dessen Coefficient die Form $\frac{a}{o}$ hat. In diesem Falle wird man nach der allgemeinen Formel bei solchem Gliede abzubrechen gezwungen seyn. Z. B. Es wäre:

$$\int \frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^8 \Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^4} = -\frac{1}{4}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^7}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3} - \frac{7}{8}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^5}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3}$$
$$-\frac{35}{o}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3} - \frac{105}{o}\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3} + \frac{105}{o}\int\frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3}$$

wobei die drei letzten Glieder die Form $\frac{a}{o}$ angenommen haben. Man kann jedoch schon bei dem zweiten Gliede nach der obigen Formel die ergänzende Integrande hinzufügen, welche im gegenwärtigen Falle $= \frac{35}{8}\int\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^4\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^4}$ ist. Betrachtet man die beiden letzten Glieder der allgemeinen Formel für $\int\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n\,\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m}$, nämlich

$$-\frac{(n-1)(n-3)\,..\,(n-(2r-3))}{(n-m)(n-m-2)\,..\,(n-m-(2r-2))}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-(2r-1)}}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}}$$
$$+\frac{(n-1)\,..\,(n-(2r-1))}{(n-m)\,..\,(n-m-(2r-2))}\int\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-2r}\,\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m}.$$

und entstehet bei der Reduction des letzten Theils ein Ausdruck von der Form $\frac{a}{o}$, so muß in diesen beiden Theilen $n-m-(2r-2) = 2$, also $n-m = 2r$ seyn, und folglich hat man in einem solchen Falle als letzte Theile:

$$-\frac{(n-1)(n-3)\,..\,(m+3)}{(n-m)(n-m-2)\,..\,2}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{m+1}}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}}$$
$$+\frac{(n-1)(n-3)\,..\,(m+1)}{(n-m)(n-m-2)\,..\,2}\int\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^m\,\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m}$$

und es kommt also hiebei noch auf die Integration von $\int[\mathrm{Tang}\,\varphi]^m\,\Delta\varphi$ an, welches nach dem Vorhergehenden geschehen kann.

Z. B. man hat:

$$\int \frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^8 \Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^4} = -\tfrac{1}{4}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^7}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3} - \tfrac{7}{8}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^5}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3} + \tfrac{35}{8}\int \frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^4 \Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^4}$$

$$= -\tfrac{1}{4}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^7}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3} - \tfrac{7}{8}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^5}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3} + \tfrac{35}{8}\left(\tfrac{1}{3}[\mathrm{Tang}\,\varphi]^3 - \mathrm{Tang}\,\varphi + \varphi\right)$$

$$= -\tfrac{1}{4}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^7}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3} - \tfrac{7}{8}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^5}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3}$$

$$+ \tfrac{35}{24}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3} - \tfrac{35}{8}\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} + \tfrac{35}{8}\varphi$$

ferner:

$$\int \frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^6 \Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} = -\tfrac{1}{4}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^5}{\mathrm{Cos}\,\varphi} - \tfrac{5}{8}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3}{\mathrm{Cos}\,\varphi} + \tfrac{15}{8}\int \frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2}\Delta\varphi$$

$$= -\tfrac{1}{4}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^5}{\mathrm{Cos}\,\varphi} - \tfrac{5}{8}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3}{\mathrm{Cos}\,\varphi} + \tfrac{15}{8}\frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} - \tfrac{15}{8}\varphi$$

Ist aber in der allgemeinen Formel n eine ungrade Zahl, so kann man $n = 2r - 1$ oder $r = \frac{n+1}{2}$ setzen, d. h. bis zur $\frac{n+1}{2}$ten Reduction fortschreiten, wodurch man erhält:

$$\int \frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n \Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m} = -\frac{1}{n-m}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}}$$

$$-\frac{n-1}{(n-m)(n-m-2)}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-3}}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}} \ldots$$

$$-\frac{(n-1)(n-2)\ldots 2}{(n-m)\ldots(1-m)}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^0}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}}$$

wobei die Integrande wegen des Factors $n-(2r-1)$ wegfällt.

Z. B.

$$\int \frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^7 \Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^4} = -\tfrac{1}{3}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^6}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3} - 2\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^4}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3} + 8\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3} - \tfrac{16}{3}\frac{}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3}$$

$$\int \frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^5 \Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^6} = \frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^4}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^5} - \tfrac{4}{3}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^5} + \tfrac{8}{15}\frac{1}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^5}$$

Diese Formel ist unbedingt brauchbar, wenn $n-m$ eine positive ungrade, oder eine negative Zahl ist, indem, wenn $n-m$ positiv und grade seyn sollte, ein Glied in der Reihe kommen muß, dessen Coefficient die Form $\frac{a}{0}$ hat. Hier wird man bei dem Gliede der Reductionsformel abbrechen müssen, wo der letzte Factor im Nenner des Coefficienten

$= 2$ ist. Setzt man also $n-m-(2r-2) = 2$, so ist $n-m = 2r$ also $r = \frac{n-m}{2}$ und die beiden letzten Theile sind in diesem Falle:

$$-\frac{(n-1)(n-3)\ldots(m+3)}{(n-m)(n-m-2)\ldots 2}\,\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{m+1}}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}}$$
$$+\frac{(n-1)(n-3)\ldots(m+1)}{(n-m)(n-m-2)\ldots 2}\int\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{m}}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m}}\,\Delta\varphi$$

wo der letzte Theil mit Hülfe der oben gefundenen Reduction zur Integration gebracht werden kann.

3. B.

$$\int\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^7\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3} = -\tfrac{1}{4}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^6}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} - \tfrac{3}{4}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^4}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} + 3\int\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3}$$
$$= -\tfrac{1}{4}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^6}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} - \tfrac{3}{4}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^4}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} + \tfrac{3}{2}\frac{1}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} + 3\log\mathrm{Cos}\,\varphi$$
$$\int\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^5\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3} = -\tfrac{1}{2}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^4}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} + 2\int\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3}\Delta\varphi$$
$$= -\tfrac{1}{2}\frac{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^4}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} + \frac{1}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} + 2\log\mathrm{Cos}\,\varphi$$

§. 86.

Um eine Recursionsformel für $\int\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m\,\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n}$ zu erhalten, setze man in die Formel IV. §. 76. für n den Werth $-n$, so erhält man:

$$\int\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m\,\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n} = \frac{1}{m-n}\,\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}}$$
$$+\frac{m-1}{m-n}\int\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-2}}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n}\,\Delta\varphi$$

Zerlegt man den zweiten Theil dieses Ausdrucks nach derselben Reductionsregel, so hat man:

$$\frac{m-1}{m-n}\int\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-2}\,\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n} = \frac{m-1}{(m-n)(m-n-2)}\,\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-3}}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}}$$
$$+\frac{(m-1)(m-3)}{(m-n)(m-n-2)}\int\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-4}\,\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n}$$

also ist:

$$\int \frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m \,\triangle\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n} = \frac{1}{m-n}\,\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}} + \frac{m-1}{(m-n)(m-n-2)}\,\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-3}}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}} + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-n)(m-n-2)} \int \frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-4}\,\triangle\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n}$$

Man erhält allgemein nach r Reductionen:

$$\int \frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m \,\triangle\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n} = \frac{1}{m-n}\,\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}} + \frac{m-1}{(m-n)(m-n-2)}\,\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-3}}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}} \ldots + \frac{(m-1)(m-3)\,..\,(m-(2r-3))}{(m-n)(m-n-2)\,..\,(m-n-(2r-2))}\,\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-(2r-1)}}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{m-1}} + \frac{(m-1)\,..\,(m-(2r-1))}{(m-n)\,..\,(m-n-(2r-2))} \int \frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-2r}\,\triangle\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n}$$

Ist hier m eine ungrade Zahl, so kann man $m = 2r-1$ setzen, oder, welches einerlei ist, bis zur $\frac{m+1}{2}$ten Reduction fortschreiten, und man erhält alsdann:

$$\int \frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m \,\triangle\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n} = \frac{1}{m-n}\,\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}} + \frac{m-1}{(m-n)(m-n-2)}\,\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-3}}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}} \ldots + \frac{(m-1)(m-3)\,..\,2}{(m-n)(m-n-2)\,..\,(1-n)}\,\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{0}}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}}$$

wobei der letzte Theil, oder die Integrande von selbst wegfällt.

Z. B.

$$\int \frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^5\,\triangle\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^4} = \frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^4}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3} - 4\,\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3} + \frac{8}{3}\,\frac{1}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3}$$

$$\int \frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^7\,\triangle\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2} = \frac{1}{5}\,\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^6}{\mathrm{Sin}\,\varphi} + \frac{2}{5}\,\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^4}{\mathrm{Sin}\,\varphi} + \frac{8}{5}\,\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2}{\mathrm{Sin}\,\varphi} - \frac{16}{5}\,\frac{1}{\mathrm{Sin}\,\varphi}$$

Ist aber hierbei m-n eine positive grade Zahl, so ist begreiflich, daß im Fortgange der Reduction endlich ein Glied kommen muß, welches eine Größe von der Form $\frac{a}{o}$ zum Coefficienten hat. Hier wird man sogleich vor solchem Gliede abbrechen können, und die hinzuzufügende Integrande läßt sich nach der allgemeinen Formel bestimmen. Man sey bis zur rten Reduction gekommen, und die r + 1te gebe zwei Glieder von der Form $\frac{a}{o}$, so muß der letzte Factor im Nenner des Coefficienten = 2 seyn, d. h. man hat $m-n-(2r-2) = 2$, woraus $m-n = 2r$ und $r = \frac{m-n}{2}$ folgt. Die beiden letzten Glieder sind also:

$$\frac{(m-1)(m-3)\ldots(n+3)}{(m-n)(m-n-2)\ldots 2}\,\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{n+1}}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}}$$
$$+\frac{(m-1)(m-3)\ldots(n+1)}{(m-n)(m-n-2)\ldots 2}\int\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{n}\,\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n}}$$

wo die Integrande nach dem Vorigen zur Darstellung gebracht werden kann.

Z. B.

$$\int\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^7\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3} = \frac{1}{4}\,\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^6}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2} + \frac{3}{4}\,\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^4}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2} + 3\int\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3}$$
$$= \frac{1}{4}\,\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^5}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2} + \frac{3}{4}\,\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^4}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2} - 3\log\mathrm{Sin}\,\varphi$$
$$\int\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^5\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3} = \frac{1}{2}\,\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^4}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2} - \frac{1}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2} - 2\log\mathrm{Sin}\,\varphi$$

Ist aber m eine grade Zahl, so setze man m = 2r oder $r = \frac{1}{2}m$, d. h. gehe bis zur $\frac{1}{2}$mten Reduction fort, so erhält man:

$$\int\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m\,\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n} = \frac{1}{m-n}\,\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}}$$
$$+\frac{m-1}{(m-n)(m-n-2)}\,\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-3}}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{m-1}}$$
$$\ldots\frac{(m-1)(m-3)\ldots 3}{(m-n)\ldots(2-n)}\,\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}}$$
$$+\frac{(m-1)(m-3)\ldots 1}{(m-n)(m-n-2)\ldots(2-n)}\int\frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n}$$

z. B.

$$\int \frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^6 \Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3} = \frac{1}{3}\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^5}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2} + \frac{5}{3}\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2} - 5\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2}$$
$$- 5\int \frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3}$$
$$= \frac{1}{3}\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^5}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2} + \frac{5}{3}\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2} - \frac{5}{2}\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2} - \frac{5}{2}\log\mathrm{Tang}\,\frac{\varphi}{2}$$

Sollte jedoch hier m–n eine positive grade Zahl seyn, so wird man endlich auf ein Glied von der Gestalt $\frac{a}{o}$ kommen, also vor demselben abbrechen müssen. Ist man beim successiven Fortschreiten im Reduciren bis zur rten Reduction gekommen, hat also die beiden letzten Glieder:

$$\frac{(m-1)(m-3)\,..\,(m-(2r-3))}{(m-n)(m-n-2)\,..\,(m-n-(2r-2))}\;\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-(2r-1)}}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}}$$
$$+ \frac{(m-1)(m-3)\,..\,(m-(2r-1))}{(m-n)\,..\,(m-n-(2r-2))}\int\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-2r}\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n}$$

erhalten, und es findet sich, daß bei der nächsten Reduction Glieder von der Form $\frac{a}{o}$ entstehen; so muß der letzte Factor des Nenners in diesen beiden Theilen, d. h. $m-n-(2r-2) = 2$ seyn, man erhält also hieraus $r = \frac{m-n}{2}$, d. h. also man kann in einem solchen Falle nur bis zur $\frac{m-n}{2}$ten Reduction fortgehen. Die beiden letzten Glieder nehmen alsdann die Gestalt:

$$\frac{(m-1)(m-3)\,..\,(n+3)}{(m-n)(m-n-2)\,..\,2}\;\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{n+1}}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}}$$
$$+ \frac{(m-1)(m-3)\,..\,(n+1)}{(m-n)(m-n-2)\,..\,2}\;\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^n\,\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n}$$

an, wo die Integrande nach dem, was oben gelehrt worden, zur Lösung gebracht werden kann. Z. B.

$$\int \frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^6 \Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^4} = \frac{1}{2}\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^5}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3} + \frac{5}{2}\int\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^4\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^4}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^5}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3} - \frac{5}{6}[\mathrm{Cot}\,\varphi]^3 - \frac{5}{2}\mathrm{Cot}\,\varphi + \frac{5}{2}\varphi$$

$$\int \frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^8 \Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^4} = \frac{1}{4}\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^7}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3} + \frac{7}{8}\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^5}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3} + \frac{35}{8}\int\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^4\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^4}$$
$$= \frac{1}{4}\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^7}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3} + \frac{7}{8}\frac{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^5}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3} - \frac{35}{8}[\mathrm{Cot}\,\varphi]^5 + \frac{35}{8}\mathrm{Cot}\,\varphi + \frac{35}{8}\varphi$$

§. 87.

Endlich ist noch der Fall übrig, wo in dem Ausdrucke $\int [\mathrm{Cos}\,\varphi]^m [\mathrm{Sin}\,\varphi]^n \Delta\varphi$ sowohl m als n negativ ist.

Um eine hier passende Reductionsformel zu erhalten, setze man in die Formel III. §. 76. m und n negativ, und man hat:

$$\int \frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m} = \frac{1}{m-1}\,\frac{1}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}}$$
$$+ \frac{m+n-2}{m-1}\int\frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-2}}$$

Reducirt man nach dieser Regel den zweiten Theil, so hat man:

$$\frac{m+n-2}{m-1}\int\frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-2}}$$
$$= \frac{m+n-2}{(m-1)(m-3)}\,\frac{1}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{m-1}\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-3}}$$
$$+ \frac{(m+n-2)(m+n-4)}{(m-1)(m-3)}\int\frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-4}}$$

also zunächst:

$$\int \frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m} = \frac{1}{m-1}\,\frac{1}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}}$$
$$+ \frac{m+n-2}{(m-1)(m-3)}\,\frac{1}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-3}}$$
$$+ \frac{(m+n-2)(m+n-4)}{(m-1)(m-3)}\int\frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-4}}$$

Man erhält allgemein nach r Reductionen:

$$\int \frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m} = \frac{1}{m-1}\,\frac{1}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}}$$
$$+ \frac{m+n-2}{(m-1)(m-3)}\,\frac{1}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}\,[\mathrm{Cos}]^{m-3}}$$
$$\ldots + \frac{(m+n-2)(m+n-4)\ldots(m+n-(2r-2))}{(m-1)(m-3)\ldots(m-(2r-1))}\,\frac{1}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-(2r-1)}}$$
$$+ \frac{(m+n-2)\ldots(m+n-2r)}{(m-1)(m-3)\ldots(m-(2r-1))}\int\frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-2r}}$$

Diese Formel gehet für n = 1 in folgende über:

$$\int \frac{\Delta\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi\,[\operatorname{Cos}\varphi]^m} = \frac{1}{m-1}\,\frac{1}{[\operatorname{Cos}\varphi]^{m-1}}$$

$$+ \frac{m-1}{(m-1)(m-3)}\cdot\frac{1}{[\operatorname{Cos}\varphi]^{m-3}}\ldots$$

$$+ \frac{(m-1)(m-3)\ldots(m-(2r-3))}{(m-1)(m-3)\ldots(m-(2r-1))}\;\frac{1}{[\operatorname{Cos}\varphi]^{m-(2r-1)}}$$

$$+ \frac{(m-1)(m-3)\ldots(m-(2r-1))}{(m-1)(m-3)\ldots(m-(2r-1))}\int\frac{\Delta\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi\,[\operatorname{Cos}\varphi]^{m-2r}}$$

$$= \frac{1}{(m-1)\,[\operatorname{Cos}\varphi]^{m-1}} + \frac{1}{(m-3)\,[\operatorname{Cos}\varphi]^{m-3}}\ldots$$

$$+ \frac{1}{(m-(2r-1)\,[\operatorname{Cos}\varphi]^{m-(2r-1)}} + \int\frac{\Delta\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi\,[\operatorname{Cos}\varphi]^{m-2r}}$$

Ist hier m eine grade Zahl, so kann man m = 2r setzen, und man hat:

$$\int\frac{\Delta\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi\,[\operatorname{Cos}\varphi]^m} = \frac{1}{(m-1)[\operatorname{Cos}\varphi]^{m-1}} + \frac{1}{(m-3)[\operatorname{Cos}\varphi]^{m-3}}\ldots$$

$$+ \frac{1}{\operatorname{Cos}\varphi} + \int\frac{\Delta\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi}.$$

wo nach dem Vorhergehenden: $\int\frac{\Delta\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi} = \log\operatorname{Tang}\frac{\varphi}{2}$

Ist hingegen m eine ungrade Zahl, so sey: $m-2r = 1$ also $r = \frac{m-1}{2}$, also hat man:

$$\int\frac{\Delta\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi\,[\operatorname{Cos}\varphi]^m} = \frac{1}{(m-1)[\operatorname{Cos}\varphi]^{m-1}} + \frac{1}{(m-3)[\operatorname{Cos}\varphi]^{m-3}}\ldots$$

$$+ \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{[\operatorname{Cos}\varphi]^2} + \int\frac{\Delta\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi\,\operatorname{Sin}\varphi}$$

Um diese letzte Integrande darzustellen, setze man:

$$\int\frac{\Delta\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi\,\operatorname{Cos}\varphi} = \int\frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Cos}\varphi]^2\,\frac{\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi}} = \int\frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Cos}\varphi]^2\,\operatorname{Tang}\varphi}$$

$$= \int\frac{d\,\operatorname{Tang}\varphi}{\operatorname{Tang}} = \log\operatorname{Tang}\varphi.$$

Z. B. Es ist:

$$\int \frac{\Delta\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi\,[\operatorname{Cos}\varphi]^8} = \frac{1}{7\,[\operatorname{Cos}\varphi]^7} + \frac{1}{5.\,[\operatorname{Cos}\varphi]^5} + \frac{1}{3\,[\operatorname{Cos}\varphi]^3} + \frac{1}{\operatorname{Cos}\varphi} + \log \operatorname{Tang}\frac{\varphi}{2}$$

$$\int \frac{\Delta\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi\,[\operatorname{Cos}\varphi]^7} = \frac{1}{6\,[\operatorname{Cos}\varphi]^6} + \frac{1}{4\,[\operatorname{Cos}\varphi]^4} + \frac{1}{2\,[\operatorname{Cos}\varphi]^2} + \log \operatorname{Tang}\varphi$$

Durch die allgemeine Formel I. des §. 76. kann man den Ausdruck $\int \frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Sin}\varphi]^n\,[\operatorname{Cos}\varphi]^m}$ auf solche Art reduciren, daß die successiven Glieder immer niedrigere Potenzen des Sinus enthalten. Setzt man nämlich in diese Formel m und n negativ, so ist:

$$\int \frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Cos}\varphi]^m\,[\operatorname{Sin}\varphi]^n} = -\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{[\operatorname{Cos}\varphi]^{m-1}\,[\operatorname{Sin}\varphi]^{n-1}} + \frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Cos}\varphi]^m\,[\operatorname{Sin}\varphi]^{n-2}}$$

folglich hat man auch:

$$\frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Cos}\varphi]^m\,[\operatorname{Sin}\varphi]^{n-2}}$$
$$= -\frac{m-n-2}{(n-1)(n-3)}\,\frac{1}{[\operatorname{Cos}\varphi]^{m-1}\,[\operatorname{Sin}\varphi]^{n-3}}$$
$$+ \frac{(m+n-2)(m+n-4)}{(n-1)(n-3)}\int \frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Cos}\varphi]^m\,[\operatorname{Sin}\varphi]^{n-4}}$$

also zunächst:

$$\int \frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Cos}\varphi]^m\,[\operatorname{Sin}\varphi]^n} = -\frac{1}{(n-1)(\operatorname{Cos}\varphi)^{m-1}\,[\operatorname{Sin}\varphi]^{n-1}}$$
$$- \frac{m+n-2}{(n-1)(n-3)\,[\operatorname{Cos}\varphi]^{m-1}\,[\operatorname{Sin}\varphi]^{n-3}}$$
$$+ \frac{(m+n-2)(m+n-4)}{(n-1)(n-3)}\int \frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Cos}\varphi]^m\,[\operatorname{Sin}\varphi]^{n-4}}$$

Man erhält allgemein nach r Reductionen den Ausdruck:

$$\int \frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m} = -\frac{1}{(n-1)[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}}$$

$$-\frac{m+n-2}{(n-1)(n-3)[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-3}}$$

$$\ldots - \frac{(m+n-2)(m+n-4)\ldots(m+n-(2r-2))}{(n-1)(n-3)\ldots(n-(2r-1))[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-(2r-1)}}$$

$$+\frac{(m+n-2)(m+n-4)\ldots(m+n-2r)}{(n-1)(n-3)\ldots(n-(2r-1))}\int\frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-2r}}$$

Ist hier $m = 1$ so hat man die speciellere Formel:

$$\int\frac{\Delta\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n} = -\frac{1}{(n-1)[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}} - \frac{n-1}{(n-1)(n-3)[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-3}}\ldots$$

$$-\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-(2r-3))}{(n-1)(n-3)\ldots(n-(2r-1))[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-(2r-1)}}$$

$$+\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-(2r-1))}{(n-1)(n-3)\ldots(n-(2r-1))}\int\frac{\Delta\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-2r}}$$

$$= -\frac{1}{(n-1)[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}} - \frac{1}{(n-3)[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-3}}$$

$$\ldots - \frac{1}{(n-(2r-1))[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-(2r-1)}} + \int\frac{\Delta\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-2r}}$$

Wenn in dieser Formel n eine grade Zahl ist, so kann man $n = 2r$ setzen, oder bis zur $\frac{n}{2}$ten Reduction fortschreiten, und man erhält:

$$\int\frac{\Delta\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n} = -\frac{1}{(n-1)[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}} - \frac{1}{(n-3)[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-3}}$$

$$\ldots - \frac{1}{\mathrm{Sin}\,\varphi} + \int\frac{\Delta\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi},$$

wo, wie oben gefunden wurde $\int\frac{\Delta\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} = \log \mathrm{Tang}\,(45^0 + \frac{1}{2}\varphi)$ ist.

Wenn aber n eine ungrade Zahl ist, so kann man $n - 2r = 1$ d. h. $r = \frac{n-1}{2}$ annehmen, wodurch die Formel die Gestalt:

$$\int\frac{\Delta\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n} = -\frac{1}{(n-1)[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}} - \frac{1}{(n-3)[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-3}}$$

$$\ldots - \frac{1}{2[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2} + \int\frac{\Delta\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi}$$

annimmt, wo nach dem Vorigen: $\int \frac{\Delta\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\varphi} = \log \operatorname{Tang}\varphi$ ist. Z. B.

$$\int \frac{\Delta\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi [\operatorname{Sin}\varphi]^8} = - \frac{1}{7[\operatorname{Sin}\varphi]^7} - \frac{1}{5[\operatorname{Sin}\varphi]^5} - \frac{1}{3[\operatorname{Sin}\varphi]^3} - \frac{1}{\operatorname{Sin}\varphi} + \log \operatorname{Tang}(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi) .$$

$$\int \frac{\Delta\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi [\operatorname{Sin}\varphi]^7} = - \frac{1}{6[\operatorname{Sin}\varphi]^6} - \frac{1}{4[\operatorname{Sin}\varphi]^4} - \frac{1}{2[\operatorname{Sin}\varphi]^2} + \log \operatorname{Tang}\varphi .$$

Um nun die allgemeine Formel für $\int \frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Sin}\varphi]^n [\operatorname{Cos}\varphi]^m}$ welche eine nach den Potenzen des Cosinus abnehmende Reihe bildet, näher zu betrachten, so sey zuerst m eine grade Zahl, und man setze $m = 2r$ oder $r = \frac{1}{2}m$, d. h. schreite bis zur $\frac{m}{2}$ten Reduction fort, so erhält man:

$$\int \frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Sin}\varphi]^n [\operatorname{Cos}\varphi]^m} = \frac{1}{m-1} \frac{1}{[\operatorname{Sin}\varphi]^{n-1} [\operatorname{Cos}\varphi]^{m-1}}$$
$$+ \frac{(m+n-2)}{(m-1)(m-3)} \cdot \frac{1}{[\operatorname{Sin}\varphi]^{n-1} [\operatorname{Cos}\varphi]^{m-3}}$$
$$\ldots + \frac{(m+n-2)(m+n-4)\ldots(n+2)}{(m-1)(m-3)\ldots 1} \cdot \frac{1}{[\operatorname{Sin}\varphi]^{n-1} [\operatorname{Cos}\varphi]^1}$$
$$+ \frac{(m+n-2)\ldots n}{(m-1)(m-3)\ldots 1} \int \frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Sin}\varphi]^n}$$

wo der letzte Theil, oder die Integrande nach dem Vorigen zur Darstellung gebracht werden kann.

Z. B. Es ist:

$$\int \frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Cos}\varphi]^6 [\operatorname{Sin}\varphi]^3} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{[\operatorname{Sin}\varphi]^2 [\operatorname{Cos}\varphi]^5} + \frac{7}{15} \cdot \frac{1}{[\operatorname{Sin}\varphi]^2 [\operatorname{Cos}\varphi]^3} + \frac{7}{3} \frac{1}{[\operatorname{Sin}\varphi]^2 \operatorname{Cos}\varphi} + 7 \cdot \int \frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Sin}\varphi]^3}$$

$$\int \frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Cos}\varphi]^8 [\operatorname{Sin}\varphi]^4} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{[\operatorname{Sin}\varphi]^3 [\operatorname{Cos}\varphi]^7} + \frac{2}{7} \frac{1}{[\operatorname{Sin}\varphi]^3 [\operatorname{Cos}\varphi]^5} + \frac{16}{21} \frac{1}{[\operatorname{Sin}\varphi]^3 [\operatorname{Cos}\varphi]^3} + \frac{32}{7} \frac{1}{[\operatorname{Sin}\varphi]^3 \operatorname{Cos}\varphi} + \frac{128}{7} \cdot \int \frac{\Delta\varphi}{[\operatorname{Sin}\varphi]^4}$$

Ist aber m in dieser Formel ungrade, so kann man nur so weit im Reduciren fortfahren, bis $m-(2r-1) = 2$ ist, indem alsdann bei der nächsten Reduction Glieder von der Form $\frac{a}{o}$ entstehen würden. Setzt man also diesen Werth für m, oder $r = \frac{m-1}{2}$, d. h. bricht man bei der $\frac{m-1}{2}$ten Reduction ab, so ist die Formel:

$$\int \frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n} = \frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}}$$
$$+ \frac{m+n-2}{(m-1)\,(m-3)}\,\frac{1}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-3}}$$
$$\ldots + \frac{(m+n-2)(m+n-4)\ldots(n+3)}{(m-1)\,(m-3)\ldots 2}\,\frac{1}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{2}}$$
$$+ \frac{(m+n-2)\ldots(n+1)}{(m-)\,(m-3)\ldots 2}\int\frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}]^n\,\mathrm{Cos}\,\varphi}$$

wobei der letzte Ausdruck nach dem, was in diesem §. abgeleitet wurde zur Darstellung gebracht werden kann.

Z. B.

$$\int \frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^7\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^6} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^4}$$
$$+ \frac{1}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2} + 4\int\frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3\,\mathrm{Cos}\,\varphi}$$
$$= \frac{1}{6}\,\frac{1}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^6} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^4} + \frac{1}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2\,[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2}$$
$$- 2\cdot\frac{1}{[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2} + 4\,\log\mathrm{Tang}\,\varphi.$$

Um die Formel für $\frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n}$, welche eine nach den successiv abnehmenden Potenzen des Sinus darstellt, näher ins Auge zu fassen, so sey n erstlich eine grade Zahl, so, daß man also $n = 2r$ oder $r = \frac{1}{2}n$ setzen, d. h. bis zur $\frac{n}{2}$ten Reduction fortschreiten könne, und man erhält die Formel:

$$\int \frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}}$$
$$- \frac{(m+n-2)}{(n-1)\,n-3)}\cdot\frac{1}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-3}}$$
$$\ldots - \frac{(m+n-2)(m+n-4)\ldots(m+2)}{(n-1)(n-3)\ldots 1}\cdot\frac{1}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{1}}$$
$$+ \frac{(m+n-2)\ldots m}{(n-1)(n-3)\ldots 1}\int\frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m}$$

deren letzter Theil oder die Integrande nach dem Vorhergehenden zur Darstellung gebracht werden kann.

Z. B. Es ist:

$$\int \frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^4} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3} - \frac{5}{3}\,\frac{1}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi} + 5\int\frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3}$$

$$\int \frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^4\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^6} = -\frac{1}{5}\,\frac{1}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^5} - \frac{8}{15}\,\frac{1}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^3} - \frac{16}{5}\,\frac{1}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3\,\mathrm{Sin}\,\varphi} + \frac{64}{5}\int\frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^4}$$

Ist aber n ungrade, so darf man nur $n-(2r-1) = 2$ d. h. $r = \frac{n-1}{2}$ setzen, oder bis zur $\frac{n-1}{2}$ten Reduction fortschreiten, da bei der nächstfolgenden Glieder von der Form $\frac{a}{o}$ entstehen würden. Man hat also in diesem Falle:

$$\int \frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n} = -\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-1}} - \frac{m+n-2}{(n-1)(n-3)}\cdot\frac{1}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^{n-3}} \ldots - \frac{(m+n-2)\ldots(m+3)}{(n-1)\,(n-3)\,..\,2}\,\frac{1}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{m-1}\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2} + \frac{(m+n-2)\ldots(m+1)}{(n-1)\,(n-3)\,..\,2}\int\frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^m\,\mathrm{Sin}\,\varphi}$$

wo die Integrande nach dem Vorigen gelöst werden kann.

Z. B. Es ist:

$$\int \frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^4\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^5} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^4} - \frac{7}{8}\,\frac{1}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^3\,[\mathrm{Sin}\,\varphi]^2} + \frac{35}{8}\int\frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\,\varphi]^4\,\mathrm{Sin}\,\varphi}$$

§. 88.

Man hat:

$$d\,\mathrm{Sin}.\,n\varphi = n.\,\mathrm{Cos}.\,n\varphi\ \Delta\varphi$$

daher:

$$\text{I.}\quad \int \mathrm{Cos.}\, n\varphi \, \Delta\varphi = \frac{\mathrm{Sin}\, n\varphi}{n}$$

Eben so findet man:

$$\text{II.}\quad \int \mathrm{Sin}\, n\varphi \, \Delta\varphi = -\frac{\mathrm{Cos}\, n\varphi}{n}$$

$$\text{III.}\quad \int \frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\, n\varphi]^2} = \frac{\mathrm{Tang}\, n\varphi}{n}$$

$$\text{IV.}\quad \int \frac{\Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\, n\varphi]^2} = -\frac{\mathrm{Cot.}\, n\varphi}{n}$$

$$\text{V.}\quad \int \frac{\mathrm{Sin}\, n\varphi.\, \Delta\varphi}{[\mathrm{Cos}\, n\varphi]^2} = \frac{\mathrm{Sec.}\, n\varphi}{n}$$

$$\text{VI.}\quad \int \frac{\mathrm{Cos}\, n\varphi\, \Delta\varphi}{[\mathrm{Sin}\, \varphi]^2} = -\frac{\mathrm{Cosec}\, n\varphi}{n}$$

Vermöge dieser Formeln ist es leicht, jede aus solchen Ausdrücken zusammengesetzte Form zu integriren, z. B. man hat:

$$\int [\overset{0}{A} + \overset{1}{A}\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \overset{2}{A}\,\mathrm{Sin}\,2\varphi \ldots + \overset{r}{A}\,\mathrm{Sin}\,r\varphi \ldots]\,\Delta\varphi$$

$$= \overset{0}{A}\varphi - \overset{1}{A}\,\mathrm{Cos}\,\varphi - \tfrac{1}{2}\overset{2}{A}\,\mathrm{Cos}\,2\varphi \ldots - \tfrac{1}{r}\overset{r}{A}\,\mathrm{Cos}\,r\varphi \ldots$$

$$\int [\overset{0}{B} + \overset{1}{B}\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \overset{2}{B}\,\mathrm{Cos}\,2\varphi \ldots + \overset{r}{B}\,\mathrm{Cos}\,r\varphi \ldots]\,\Delta\varphi$$

$$= \overset{0}{B}\varphi + \overset{1}{B}\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{1}{2}\overset{2}{B}\,\mathrm{Sin}\,2\varphi \ldots + \tfrac{1}{r}\overset{r}{B}\,\mathrm{Sin}\,r\varphi \ldots$$

u. s. w.

Durch eine leichte Deduction findet man folgende Beziehungen:

$$[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{2n} = \frac{1}{2^{2n-1}}\,(\mathrm{Cos}\,2n\varphi + {}^{2n}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,\mathrm{Cos}\,(2n-2)\varphi$$

$$\ldots + {}^{2n}\overset{r}{\mathfrak{B}}\,\mathrm{Cos}\,(2n-2r)\varphi \ldots + {}^{2n}\overset{n-1}{\mathfrak{B}}\,\mathrm{Cos}\,2\varphi + \tfrac{1}{2}{}^{2n}\overset{n}{\mathfrak{B}})$$

$$[\mathrm{Cos}\,\varphi]^{2n+1} = \frac{1}{2^{2n}}\,(\mathrm{Cos}\,(2n+1)\varphi + {}^{2n+1}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,\mathrm{Cos}\,(2n-1)\varphi$$

$$\ldots + {}^{2n+1}\overset{r}{\mathfrak{B}}\,\mathrm{Cos}\,(2n-(2r-1))\varphi \ldots + {}^{2n+1}\overset{n}{\mathfrak{B}}\,\mathrm{Cos}\,\varphi)$$

Aehnliches findet sich für $[\mathrm{Sin}\,\varphi]^n$, allein zu diesem Zwecke genügt es zu bemerken, daß $\mathrm{Sin}\,\varphi = \mathrm{Cos}\,(\frac{1}{2}\pi - \varphi)$.

Vermöge dieser Formeln findet man z. B.

$$[\mathrm{Cos}\,\varphi]^4 = \tfrac{1}{8}(\mathrm{Cos}\,4\varphi + 4\,\mathrm{Cos}\,2\varphi + 3)$$

$$[\mathrm{Cos}\,\varphi]^7 = \tfrac{1}{64}(\mathrm{Cos}\,7\varphi + 7\,\mathrm{Cos.}\,5\varphi + 21.\,\mathrm{Cos.}\,3\varphi + 35\,\mathrm{Cos}\,\varphi$$

folglich hat man:

$$\int [\mathrm{Cos}\,\varphi]^4 \triangle\varphi = \tfrac{1}{8}\int (\mathrm{Cos}\,4\varphi + 4\,\mathrm{Cos}\,2\varphi + 3)\triangle\varphi$$
$$= \tfrac{1}{8}\left(\frac{\mathrm{Sin}\,4\varphi}{4} + 2\,\mathrm{Sin}\,2\varphi + 3\varphi\right)$$

$$\int [\mathrm{Cos}\,\varphi]^7 \triangle\varphi = \tfrac{1}{64}\int (\mathrm{Cos}\,7\varphi + 7\,\mathrm{Cos}\,5\varphi + 21\,\mathrm{Cos.}\,3\varphi$$
$$+ 35\,\mathrm{Cos}\,\varphi)$$
$$= \tfrac{1}{64}\left(\frac{\mathrm{Sin}\,7\varphi}{7} + \frac{7\,\mathrm{Sin}\,5\varphi}{5} + 7\,\mathrm{Sin}\,3\varphi + 35\,\mathrm{Sin}\,\varphi\right)$$

§. 89.

Es bezeichne $\varphi(x)$ irgend eine algebraische Function von x, und man habe die Form $\varphi(x).\,\mathrm{Arc\,Sin}\,x \triangle x$ zur Integration zu bringen, so ist, wenn man darauf die allgemeine Reductionsformel

$$\int X\,dY = XY - \int Y\,dX$$

anwendet:

$$\int \varphi(x)\,\mathrm{Arc.\,Sin}\,x \triangle x = \mathrm{Arc.\,Sin}\,x.\int \varphi(x)\triangle x$$
$$- \int (d\,\mathrm{Arc.\,Sin}\,x.\int \varphi(x)\triangle x)$$

Das Integral $\int \varphi(x)\triangle x$ kann als algebraische Function nach dem, was vorher gezeigt wurde, abgeleitet werden; sey dieses $= X$, so hat man, wenn man das Differential von

$$\mathrm{Arc.\,Sin}\,x, = \frac{\triangle x}{\sqrt{(1-x^2)}} \text{ berechnet:}$$

$$\int \varphi(x)\,\mathrm{Arc\,Sin}\,x.\triangle x = X.\,\mathrm{Arc.\,Sin}\,x - \int \frac{X\triangle x}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

Ist daher X eine algebraische Function, so wird das Integral von $\varphi(x)\,\mathrm{Arc.\,Sin}\,x$ auf ein algebraisches zurückgebracht.

z. B. Es sey $\varphi(x) = x^n$, so hat man:

$$\int x^n \,\text{Arc.}\,\text{Sin}\,x \,\Delta x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,\text{Arc.}\,\text{Sin}\,x - \int \frac{x^{n+1}\,\Delta x}{(n+1)\sqrt{(1-x^2)}}$$

wo $\int \frac{x^{n+1}\,\Delta x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ nach §. 71. zur Lösung gebracht werden kann.

Ist $n = 0$, so hat man:

$$\int \text{Arc.}\,\text{Sin}\,x.\,\Delta x = x\,\text{Arc.}\,\text{Sin}\,x - \int \frac{x\,\Delta x}{\sqrt{(1-x^2)}}$$
$$= x\,\text{Arc.}\,\text{Sin}\,x + \sqrt{(1-x^2)}.$$

Eben so findet man:

$$\int \varphi(x)\,\text{Arc.}\,\text{Cos}\,x\,\Delta x = \text{Arc.}\,\text{Cos}\,x \int \varphi(x)\,\Delta x$$
$$+ \int \left(\frac{\Delta x}{\sqrt{(1-x^2)}} \int \varphi(x)\,\Delta x\right)$$

oder wenn man $\int \varphi(x)\,\Delta x = X$ setzt:

$$\int \varphi(x)\,\text{Arc.}\,\text{Cos}\,x\,\Delta x = X\,\text{Arc.}\,\text{Cos}\,x + \int \frac{X\,\Delta x}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

wo mit der Integrande desselben Statt findet.

Ist $\varphi(x) = x^n$, so hat man hier:

$$\int x^n\,\text{Arc.}\,\text{Cos}\,x\,\Delta x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,\text{Arc.}\,\text{Cos}\,x + \int \frac{x^{n+1}\,\Delta x}{(n+1)\sqrt{(1-x^2)}}$$

und für $n = 0$:

$$\int \text{Arc.}\,\text{Cos}\,x\,\Delta x = x\,\text{Arc.}\,\text{Cos}\,x + \int \frac{x\,\Delta x}{\sqrt{(1-x^2)}}$$
$$= x\,\text{Arc.}\,\text{Cos}\,x - \sqrt{(1-x^2)}$$

Ferner ist:

$$\int \varphi(x)\,\text{Arc.}\,\text{Tang}\,x\,\Delta x = \text{Arc.}\,\text{Tang}\,x \int \varphi(x)\,\Delta x$$
$$- \int \left(\frac{\Delta x}{1+x^2} \int \varphi(x)\,\Delta x\right)$$

oder für $\int \varphi(x)\,\Delta x$ das Zeichen X gesetzt:

$$\int \varphi(x)\,\text{Arc.}\,\text{Tang}\,x\,\Delta x = X\,\text{Arc.}\,\text{Tang}\,x. - \int \frac{X\,\Delta x}{1+x^2}$$

Es sey z. B. $\varphi(x) = x^n$, so hat man:

$$\int x^n\,\text{Arc.}\,\text{Tang}\,x\,\Delta x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,\text{Arc.}\,\text{Tang}\,x$$
$$- \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\,\Delta x}{1+x^2}$$

Ist hier $n = 0$, so erhält man:

$$\int \text{Arc.}\,\text{Tang}\,x\,\Delta x = x.\,\text{Arc.}\,\text{Tang}\,x - \int \frac{x\,\Delta x}{1+x^2}$$
$$= x\,\text{Arc.}\,\text{Tang}\,x - \frac{\log(1+x^2)}{2}$$

Aehnliche, eben so leicht abzuleitende Formeln findet man für Arc. Cot. x, Arc. Sec. x u. s. w.

Integration der höheren Differentiale.

§. 90.

Was die Integration höherer Differentiale anbetrifft, so ist diese nur eine Wiederholung desselben Verfahrens. Ist eine Function von x durch dreimalige Differentiation einer ursprünglichen Function entstanden, so enthält sie den Factor $\triangle x^3$, allgemein, sie wird den Factor $\triangle x^r$ enthalten, wenn sie durch rmalige Differentiation einer anderen Function hervorgebracht seyn soll. So wie man das rte Differential einer Function durch d^r andeutet, so bezeichnet man auch allgemein das rte Integral einer mit $\triangle x^r$ multiplicirten Function durch $\int^r$, so, daß man also, wenn

$$d^r y = X \triangle x^r, \text{ ist,}$$
$$y = \int^r X \triangle x^r$$

schreibt.

Man habe z. B. $d^3 y = a x^n \triangle x^3$, so ist: $y = \int^3 a x^n \triangle x^3$. Will man die Integration vornehmen, so setze man zuerst:

$$\frac{d^3 y}{\triangle x^2} = d\left(\frac{d^2 y}{\triangle x^2}\right) = a x^n \triangle x.$$

$$\text{also ist } \frac{d^2 y}{\triangle^2 x} = a \int x^n \triangle x = \frac{a x^{n+1}}{n+1} + C.$$

wo C eine Constante bedeutet. Nun ist eben so:

$$\frac{d^2 y}{\triangle x} = d\left(\frac{d y}{\triangle x}\right) = \frac{a}{n+1} x^{n+1} \triangle x + C \triangle x$$

also ist:

$$\frac{d y}{\triangle x} = \frac{a}{n+1} \int x^{n+1} \triangle x + \int C \triangle x$$
$$= \frac{a}{(n+1)(n+2)} . x^{n+2} + C x + D$$

wo wieder D eine Constante bezeichnet.

Ferner hat man auch, wenn man auf beiden Seiten mit $\triangle x$ multiplicirt:

$$d y = \frac{a}{(n+1)(n+2)} x^{n+2} \triangle x + C x \triangle x + D \triangle x$$

also:

$$y = \frac{a}{(n+1)(n+2)(n+3)} \cdot x^{n+3} + Cx^2 + Dx + E$$

wo die Größe E die bei der letzten Integration entstehende Constante bedeutet.

Man kann übrigens durch Anwendung der allgemeinen Reductionsformel:

$$\int P\,dQ = PQ - \int Q\,dP$$

noch andere allgemeine Verfahrungs-Arten und Formeln entwickeln, die jedoch in den meisten Fällen nicht so schnell zum Resultate führen, als das ursprüngliche Verfahren.

Principien

des

Fluentencalculs.

Erster Abschnitt.

Von den allgemeinen Eigenschaften der Fluenten, insofern diese aus dem bekannten Gesetze folgen.

---

§. 91.

Eine stetige oder continuirliche Größe, Continuum, ist jede Größe, welche man sich im Zustande des Werdens gedenkt, so, daß dieses Werden oder Entstehen nicht sprungweise, sondern durch ununterbrochenen Fortgang geschiehet.

So entstehet eine jede Linie, sey sie von jeder beliebigen Art, dadurch, daß sich ein Punct, eine Fläche dadurch, daß sich eine Linie, ein Körper endlich dadurch, daß sich eine Fläche im Raume fortbewegt.

§. 92.

Eine stetige Größe ändert sich in jedem Augenblicke, aber die Aenderung einer solchen Größe von einem gewissen Momente an, kann größer, oder geringer seyn, als die einer andern von demselben Augenblicke an gerechnet. Der Grund davon kann in verschiedenen Umständen liegen, entweder hatte die eine ein größeres Bestreben, sich zu ändern, als die andere, oder sie hatte, wenn dies auch nicht der Fall war, länger Gelegenheit sich zu ändern, oder endlich, beides fand zugleich Statt.

Die continuirlichen Größen durchlaufen gewisse Zustände, und da eine und dieselbe nicht in einem gewissen Zustande, A, und in einem andern, B, zu gleicher Zeit seyn kann; so muß man annehmen, daß während eines jeden Entstehens einer Größe eine Zeit verfließe, welche man ihr daher als **Gelegenheit** zum Werden zugestehen muß.

So entstehet also der Begriff von **Gelegenheit zum Werden**; sie ist ursprünglich immer die **Zeit**, welche jedoch auch durch andere ähnlich fortgehende Größen repräsentirt werden kann. Eben so gelangt man auch durch eine nähere Betrachtung zu dem wichtigen Begriffe vom **Bestreben**, womit sich eine werdende oder entstehende Größe ändert, und welches jede dieser Größen in jedem Zustande wirklich besitzt.

Wenn sich von zwei continuirlichen Größen in einem Momente oder Augenblicke jede in einem gewissen Zustande der Größe befindet, und die eine hat sich nach Ablauf einer bestimmten Zeit oder einer ihr ertheilten Gelegenheit, sich zu ändern, mehr geändert, als die andere während derselben Gelegenheit; so kann man noch nicht sagen, die erste habe in **jenem Zustande** ein größeres Bestreben sich zu ändern gehabt, als diese; sie kann in der That ein geringeres Bestreben besessen haben, welches sich aber während jener Zeit oder Gelegenheit vergrößert hatte. Man kann einer entstehenden Größe, in einem gewissen Zustande, in welchem sie sich befindet, nur dann ein größeres Bestreben zusprechen, als einer anderen in einem gewissen Zustande, **wenn sie fähig ist, so wie sie aus jenem Zustande wieder hervortreten will, größere Veränderungen in ihrer Größe hervorzubringen, als es die andere in dem Augenblicke wo sie ihren Zustand verlassen will, vermag.**

§. 93.

Grundsatz.

Wenn einer werdenden oder entstehenden Größe eine Zeit oder Gelegenheit zum Entstehen gegeben ist, wodurch sie von einem gewissen Zustande zu einem andern gelangte, so liegen, sey der Unterschied beider Zustände noch so gering, zwischen dem ersten und dem andern noch unzählig viele andere Zustände, und man kann nicht sagen,

daß ein gewisser Zustand der nächstfolgende eines andern sey.

Wenn daher eine werdende Größe aus dem Zustande des Nichts hervorgetreten, und also zu einem reellen Größenzustande gelangt ist, so liegen zwischen beiden noch unzählig viele andere Zustände, wovon keiner der nächstfolgende des anfänglichen Zustandes, also der kleinste Zustand einer Größe ist. Soll daher das sogenannte unendlich Kleine diejenige Größe seyn, welche kleiner ist, als jede, welche gegeben werden kann, so streitet dieses offenbar mit obigem Principe, wenn man nicht etwa den Nullzustand selbst damit meint.

§. 94.

Grundsatz.

Wenn eine werdende Größe von einem Zustande dadurch, daß ihr Gelegenheit zum Entstehen gegeben wurde, zu einem andern gelangte, so ist sie während dieser Gelegenheit alle Zustände, die zwischen jenen beiden liegen, durchlaufen.

§. 95.

Eine fließende Größe oder Fluente ist eine solche stetige oder continuirliche Größe, bei welcher das Entstehen oder Werden nach einem sich immer gleichbleibenden Gesetze geschiehet, oder, welche entweder gesetzmäßig wächst oder gesetzmäßig abnimmt.

Ein Punct z. B., welcher im Raume irgend eine Bewegung angenommen hat, beschreibt eine Linie, oder einen Zug im Raume, welcher jede beliebige Gestalt haben kann; dieser ist also eine stetige Größe, allein, sobald jener Punct von einem sich unabänderlich gleich bleibenden Gesetze geführt wird, so ist auch der Zug gesetzmäßig, oder eine Curve, und und dann heißt er eine fließende Größe, oder eine Fluente.

Was von der stetigen Größe im Allgemeinen gilt, das kommt auch der Fluente, als einem niederen Begriff jener zu, und es gelten daher obige beiden Grundsätze auch von der Fluente.

§. 96.

Derjenige Theil der Mathematik, welcher sich mit den gesetzmäßig werdenden Größen, d. h. mit den Fluenten oder fließenden Größen beschäftigt, ihre Eigenschaften aus ihrem Gesetze ableitet, und umgekehrt, das Gesetz aus ihren bekannten Eigenschaften erforschen lehrt, heißt der Fluentencalcul, (Fluxionsrechnung, Differentialrechnung, Analysis des Unendlichen, höhere Analysis, Functionenlehre, Derivationscalcul, Rechnung mit veränderlichen Größen.)

§. 97.

Bei vielen Untersuchungen über fließende Größen genügt es, sich dieselben als vorhanden und schon erzeugt vorzustellen. Davon geben die meisten Fälle der Elementargeometrie ein Beispiel, und selbst die sogenannte analysische Geometrie hat zum Gegenstande ihrer Betrachtung viele Untersuchungen über Curven, bei welchen man sich vorstellen kann, die durch ein Fließen der Ordinate entstehende Curve sey schon entstanden. Hierzu gehören Untersuchungen über die Verhältnisse grader Linien, welche man in der Curve ziehen kann u. dgl. Aber sobald man das Krumme jener Curven selbst, und damit verwandte Eigenschaften derselben untersucht, so muß man sich schlechterdings das Entstehen derselben gedenken, d. h. die Untersuchung gehört ins Gebiet des Fluentencalculs.

§. 98.

Wenn man einer Fluente das einemal mehr, das anderemal weniger Gelegenheit zu fließen gegeben hat, so wird sie, wenigstens im Allgemeinen, das einemal zu einem andern Zustande gekommen seyn, als das anderemal; der jedesmalige Zustand der Fluente hängt daher von der Gelegenheit ab, die ihr dazu ertheilt werden mußte, und wenn man das Gesetz kennt, so kann man aus jeder Gelegenheit den Zustand, zu welchem die Fluente nach Verlauf jener gelangte, unmittelbar berechnen. Sollen z. B. um den einfachsten Fall anzuführen, die Zustände der Fluente den correspondirenden Gelegenheiten proportional seyn, d. h. ist das Gesetz einer Fluente so beschaffen, daß die Zustände mit ihren dazu erfoderlichen Gelegenheiten verglichen, ein constantes Verhältniß $= a$ geben; so ist, wenn man die Fluente durch y, die Gelegenheit allgemein durch x bezeichnet:

$$\frac{y}{x} = a \text{ also } y = a\,x.$$

durch welche Gleichung oder Function das Gesetz jener Fluente vollständig ausgedrückt wird. Nähme man z. B. ferner an, daß die Zustände einer Fluente mit den Quadraten der Gelegenheiten verglichen, ein unwandelbares Verhältniß $= a$ geben, so ist:

$$\frac{y}{x^2} = a \text{ oder } y = a x^2.$$

Wollte man ferner das Gesetz für eine Fluente so annehmen, daß die Cubi der Zustände mit den Quadraten der Gelegenheiten verglichen, eine constante Größe a geben, so ist:

$$\frac{y^3}{x^2} = a \text{ oder } y^3 = a x^2,\ y = \sqrt[3]{a x^2}$$

Auf diese Weise kann man jedes beliebige Gesetz einer Fluente in analytischen Zeichen ausdrücken, d. h. der Ausdruck des Gesetzes einer Fluente ist eine Function der Gelegenheit zu fließen.

In der Analysis heißt eine Function einer Hauptgröße x ein aus dieser und anderen Nebengrößen auf irgend eine Art arithmetisch zusammengesetzter Ausdruck. Dieser Begriff ist formal, und paßt daher auch für die Analysis, als formale Wissenschaft. Sobald man aber ins Gebiet des Fluentencalculs oder der Differentialrechnung, als einer materialen Wissenschaft, eintritt, so nimmt auch die Function eine materiale Bedeutung an, indem sie der Ausdruck des Gesetzes ist, nach welchem eine Fluente fließt.

§. 99.

Gedenkt man sich eine Fluente, deren Gesetz allgemein durch die Function

$$y = \varphi\,(x)$$

ausgedrückt ist, so, daß y die Fluente, x aber allgemein die Gelegenheit zu fließen bedeutet; so wird man zuerst den Zustand der Fluente zu bestimmen suchen, in welchem sie sich befindet, wenn ihr noch keine Gelegenheit zu fließen ertheilt worden ist, (welches geschiehet, indem man in y oder $\varphi(x)$ für x den Werth o substituirt) und darauf das fernere Fließen durch das bekannte, durch $\varphi(x)$ dargestellte Gesetz zu erkennen suchen.

Anmerk. Soll durch die Function:

$$y = \varphi(x)$$

eine beliebige Fluente ausgedrückt werden, so stellt x allgemein immer die Zeit vor. Es giebt jedoch viele Fälle, wo man sich diese Zeit bequem als grade Linie repräsentirt gedenkt. Die Abscisse ist daher nicht die ursprüngliche Gelegenheit, welche erfoderlich war, die Ordinate zu erzeugen, sondern nur Repräsentant der Zeit, die verfließen mußte, ehe die Ordinate zu dem Zustande gelangen konnte.

§. 100.

Lehrsatz.

Eine Fluente kann während einer gewissen Gelegenheit, sey diese übrigens noch so gering, nicht in demselben Zustande verweilen, in welchem sie anfänglich war.

Denn gesetzt, die Fluente, deren Gleichung:

$$y = \varphi(x)$$

seyn mag, sey in dem Zustande A gewesen, welches eine constante Größe ist, die aus der Function hervorging, indem man für x einen gewissen bestimmten Werth substituirte. Könnte nun die Fluente während einer Gelegenheit in dem Zustande A verbleiben, d. h. eine zeitlang denselben Werth behalten, so wäre die Function, während jenes geschähe:

$$y = A$$

d. h. die Fluente hätte auf eine Zeit ihr Gesetz geändert, welches, der Definition der Fluente gemäß, unmöglich ist.

Eine Fluente, welche in einem gewissen Zustande war, tritt also augenblicklich aus diesem, wenn sie Gelegenheit zu fließen bekömmt; ist daher eine Fluente in dem Nullzustande, so nimmt sie unmittelbar nachher wieder reelle (positive oder negative) Werthe an, sobald ihr Gelegenheit zu fließen gestattet wird.

§. 101.

Lehrsatz.

Wenn sich eine Fluente in einem gewissen Zustande, A, befindet, und sie ist im Begriff, in solche Zustände überzugehen, welche denjenigen, die sie beim Uebergange in den Zustand zuletzt verließ, widerstreitend sind, so ist jener Zustand der Nullzustand.

Denn eine Größe, welche sich in irgend einem Zustande befindet, und in den widerstreitenden, d. h. vom positiven zum negativen, und umgekehrt, übergehen will, muß den Begriffen des Widerstreits gemäß, anfänglich ihren Zustand der Größe vermindern, bis er ganz annihilirt ist, und ist erst dann im Stande, widerstreitende Werthe anzunehmen, oder in widerstreitende Zustände überzugehen. Da nun eine Fluente beim Fließen keinen Zustand überspringen kann, sondern successive jeden zwischenliegenden Werth oder Zustand durchfließen muß; (Grundsatz §. 94.) so folgt hieraus, daß sie, um von gewissen Zuständen in widerstreitende übergehen zu können, den Nullzustand durchlaufen, und sich in dem Momente, wo sie jene anfänglichen Zustände verließ, und im Begriff ist, in die widerstreitenden überzugehen, im Nullzustande selbst befinden muß.

Anmerk. Wenn sich eine Fluente in irgend einem beliebigen Zustande A befindet, so wollen wir die Zustände, welche sie beim Uebergange in A zuletzt verließ, und diejenigen, in welche sie, so wie sie aus A hervortritt, sogleich einzugehen bestrebt ist, der Abkürzung wegen **vorhergehende und nachfolgende Zustände** nennen, wobei man jedoch nicht vergessen darf, was man darunter zu verstehen habe.

Sind also hiernach die vorhergehenden und nachfolgenden Zustände widerstreitend, so ist der Zustand selbst der Nullzustand.

Anmerk. Man hat wohl angenommen, daß eine Fluente aus einem Zustande in den widerstreitenden auch durch das sogenannte Unendliche gehen könnte, und sich dabei vornehmlich auf eine Function wie $y = \frac{a}{x}$ berufen, wo y für jedes positive x mit a einstimmig, für jedes negative x mit a widerstreitend, und für $x = 0$, wie man sich auszudrücken pflegt, unendlich ist.

Der Begriff der Größe ist relativ; wenn man sich eine Größe a gedenkt, so vergleicht man sie mit einer andern Größe, und ihr größerer oder geringerer Werth gilt immer nur in Bezug auf diese Einheit. Je größer man die Einheit annimmt, desto geringer erscheint die Größe a, je kleiner man sie sich gedenkt, desto größer ist sie, so, daß also ein und dasselbe das einemal sehr groß, das anderemal sehr gering seyn kann. Größen, welchen man gar keine Einheit zugestehen wollte, sind daher ungedenkbar, so, daß man also zu behaupten berechtigt ist, $\frac{a}{0}$ sey eben so gut ein Unding, als $\sqrt{-1}$. Wenn man eine solche Function von x hat, deren Nenner bis auf 0 abnehmen kann, und darauf wieder negativ wird, so nimmt die Function immer größere und größere Werthe an, je kleiner der Nenner wird, und da man sich diesen so klein gedenken kann, als man will, so kann auch die Function so große Werthe annehmen, als man nur immer beabsichtigt; aber sobald dieser Nenner ganz wegfällt, so ist es gar keine Größe mehr, welche durch den Ausdruck angezeigt wird. Ausdrücke der Art gehören daher zu den Unmögliches fodernden, aber sie deuten immer an, daß eine Größe vorher in Zuständen gewesen ist, welche so groß waren, als man sie sich nur gedenken will.

Wenn sich daher bei einer Fluente, welche durch eine Gleichung wie $y = \frac{a}{x}$ ausgedrückt wird, das x immer mehr vermindert, so wird dadurch y immer größer und größer, und kann jeden Zustand, werde er noch so groß gedacht, erreichen, für $x = 0$ aber giebt es keinen Werth für die Fluente mehr. Wird x negativ, indem es sich von 0 aus erst in sehr kleinen Zuständen befindet, so erhält die Fluente sehr große negative Werthe, und diese können wieder so groß seyn, als man sie sich immer gedenken mag. Während x in negativen Zuständen wächst, nimmt dann die Fluente allmälig wieder ab. Hieraus folgt aber, daß die Fluente nicht zusammenhängend ist, sie macht einen Sprung, und zwar den größesten, welcher gemacht werden kann, von dem denkbar größesten positiven Zustande in einen eben solchen negativen. Die Gleichung drückt zwei Fluenten aus, welche identisch sind, aber beide in keiner anderen Verbindung mit einander stehen, als daß sie durch dieselbe Gleichung ausgedrückt werden. Man kann sich diese Gleichung durch Coordinaten versinnlichen. Ist CB die Abscisse (fig. 1.), A der Anfangspunct in derselben; so siehet man aus der Gleichung, daß für große Werthe von x das y sehr klein werden muß. Mag man aber das x noch so groß annehmen, eine Größe bleibt y immer, obgleich es so klein werden kann, als man will; die Curve kann also die Abscissenlinie nie erreichen. Nimmt nun x allmälig ab, so wird y immer größer und größer, kann so groß werden, als man will, wenn man nur x klein genug annimmt, oder sich die Ordinate nahe genug an A gerückt gedenkt. Für negative Werthe von x findet dasselbe, nur in widerstreitenden Zuständen Statt. Nimmt man nun eine Coordinatenverwandlung vor, indem man DE, welches auf der bisherigen Abscisse senkrecht stehet, zur neuen Abscisse macht, so hat man nur nöthig, das x in der Gleichung als Ordinate, y als Abscisse zu betrachten, und die Gleichung bleibt übrigens dieselbe. Jetzt aber siehet man, wie vorher, man mag für die Abscisse y noch so große Werthe annehmen, daß die Ordinaten x immer noch angebliche Werthe behalten, sey y positiv, oder negativ. Also wird die Curve die verlängerte Linie DE nie erreichen können, so wenig dieses bei der Linie CB der Fall seyn konnte, und es ist daher evident, daß AD oder AE nicht als Ordinate für die Abscisse o angesehen werden kann, so wenig als AB oder AC, wenn BC als Abscissenrichtung angenommen wird. Beide Curvenzweige stehen miteinander in gar keiner Verbindung, als der Lage nach. Wenn also eine Fluente von einem Zustande in den widerstreitenden übergehet, und in dem Augenblicke $= \frac{a}{o}$ wird, so kann man jedesmal annehmen, daß hier die Gränze von zwei verschiedenen und getrennten Fluenten sey, die mit einander gar nichts gemein haben.

Wir wollen uns daher in der Folge an Ausdrücke dieser Art nicht stoßen, sie gehören eben so gut in die Größenlehre, wie der Ausdruck: $a + b\sqrt{-1}$ u. dgl. So wenig man ohne diese fertig werden kann, eben so nothwendig sind auch jene, um in die Natur des Gegenstandes eindringen zu könuen. Winkel von 90^o haben keine Tangente und Secante, denn diese bekommen hier die Form $\frac{a}{o}$; aber dieses zeigt an, daß beide für Winkel nahe an 90^o sehr groß gewesen sind, ja, jeden gedenkbar großen Werth angenommen haben. Bekömmt man daher in der Rechnung Ausdrücke, wie $\varphi(x) = \text{Tang } y$ oder $\psi(x) = \text{Sec. } y$, und diese Functionen werden für gewisse Werthe von x, $= \frac{a}{o}$, so siehet man sogleich, daß hier $y = \frac{1}{2}\pi$ seyn müsse, und man kann dieses mit eben dem Rechte schließen, als daß $y = o$ seyn müsse, wenn $\varphi(x) = o$ wird, oder daß y den Werth o annehmen müsse, wenn $\psi(x) = 1$ ist, u. dgl.

§. 102.

Lehrsatz.

Wenn sich eine Fluente in einem reellen Zustande A befindet, so sind die vorhergehenden und nachfolgenden Zustände mit A einstimmig.

Denn soll die Fluente, indem sie aus A hervortritt, in mit A widerstreitende Zustände übergehen, so muß sie erst den Nullzustand durchlaufen, (§. 101.) und zwischen diesem und dem Zustande A befinden sich noch unzählig viele andere Zustände, (§. 93.) welche noch mit A einstimmig sind; diejenigen Zustände also, in welche die Fluente eintritt, indem sie A verläßt, sind mit A einstimmig. Soll ferner die Fluente, ehe sie zu dem Zustande A gelangte, in mit A widerstreitenden Zuständen gewesen seyn, so müßte sie, damit sie wirklich in A übergehen kann, erst den Nullzustand durchfließen; zwischen diesem aber und dem Zustande A befinden sich noch andere Zustände, welche mit A einstimmig sind. Also sind auch diejenigen Zustände, welche die Fluente zuletzt verließ, indem sie in A überging, mit A einstimmig.

Befindet sich aber eine Fluente in dem Nullzustande, so ist nicht allein möglich, daß die Zustände aus welchen sie zuletzt in jenen überging, denen, in welche sie wieder übergehet, indem sie den Nullzustand verläßt, widerstreitend sind, sondern sie können auch mit einander einstimmig seyn, indem eine Fluente bis zu o abnehmen, und darauf wieder in denselben Zuständen wachsen kann.

Findet man also auch umgekehrt, daß die vorhergehenden und nachfolgenden Zustände von A mit einander einstimmig sind, so ist der Zustand A entweder der Nullzustand, oder, wenn er reell ist, so ist er mit jenen Zuständen einstimmig, d. h. allgemein, **A kann mit den vorhergehenden und nachfolgenden Zuständen nicht widerstreitend seyn.**

§. 103.

Wenn eine Fluente von der Beschaffenheit ist, oder ein solches Gesetz als Fließens hat, daß sie sich jederzeit in eben dem Maaße ändert, in welchem die Gelegenheiten größer oder kleiner werden; so sagt man, sie ändere sich mit Gleichförmigkeit. Die Function für diese Fluente ist: $y = a + bx$. Ueberall nimmt sie bei gleichen Gelegenheiten um gleichviel zu oder ab, überall hat sie ein gleiches constantes Bestreben zu fließen, sie ist die einfachste Fluente, und der Gegenstand der Elementarmathematik. Alle übrigen Fluenten, welche man ungleichförmige nennt, werden auf diese zurückgeführt.

§. 104.

Der Begriff des Bestrebens zu fließen, ist der wichtigste im Fluentencalcul, und man hat sich daher sehr mit ihm zu befreunden. Betrachtet man eine Fluente, sey sie von welcher Art man wolle, so bemerkt man sogleich, daß sie in jedem Zustande, in welchen sie kommen kann, ein größeres oder geringeres Bestreben habe, womit sie sich ändern will. Bei der Parabel z. B. wachsen die Ordinaten immerwährend, wenn man die Axe als Abscissenrichtung, den Scheitel als Ursprung der Coordinaten annimmt; aber sie nehmen im Anfange weit schneller zu, als im Fortgange. Die Ordinaten dieser Curve haben überall ein Bestreben, wirklich zu wachsen, aber dieses wird nahe am Scheitel größer seyn, als für größere Abscissen. Befindet sich die Ordinate in dem Zustande PM, (fig. 2.) so ist sie fähig, größere Veränderungen hervorzubringen, als sie es in einem entfernteren Zustande QN vermag, sie hat in dem ersteren Zustande ein größeres Bestreben zu wachsen, als in dem andern. Ist der Scheitelpunct A der Ellipse, fig. 3, der Anfangspunct, die große Axe die Abscissenrichtung, so siehet man, daß die Ordinate in dem Zustande PM ein größeres Bestreben zu wachsen hat, als in dem Zustande QN. Ist die Ordinate über den Zustand CB hinaus, so wird sie wieder kleiner, sie nimmt ab, sie hat jetzt kein Bestreben zu wachsen mehr, sondern ein Bestreben abzunehmen. Aber sie wird in einem Zustande HK fähig seyn, mehr abzunehmen, als in FG, sie wird in FG ein kleineres Bestreben abzunehmen haben, als in HK. Es ist also fürs erste hinlänglich, gezeigt zu haben, daß eine jede Fluente in jedem Zustande ein gewisses Bestreben zu fließen habe, welches wirklich hervortritt, sobald der Fluente Gelegenheit gegeben wird, von jenem Zustande ab weiter zu fließen.

§. 105.

Dieses Bestreben zu fließen ist also bei der gleichförmigen Fluente immer dasselbe, bei den ungleichförmigen aber veränderlich, es hängt von dem Zustande ab, in welchem sich die Fluente befindet, und, da dieser wieder von der Gelegen=

heit, bei welcher die Fluente dahin gelangt ist, dependirt, so wird auch die Größe des Bestrebens, gleichfalls von der Gelegenheit abhängig seyn, sie ist eine Function derselben, folglich wieder eine Fluente. Veränderte sich das Bestreben nicht gesetzmäßig, d. h. wäre dasselbe nicht gleichfalls eine Fluente, so könnte auch das, was dadurch bewirkt wird, das Fließen der Fluente selbst, nicht gesetzmäßig seyn. Indem die Fluente successiv ihre Zustände durchfließt, wird dasselbe auch gleichzeitig mit dem Bestreben der Fall seyn. Hat man das Gesetz für die Fluente durch eine Function dargestellt, so giebt es auch gewiß eine andere Function, welche das Gesetz, nach welchem das Bestreben fließt, darstellt, und da das Gesetz für das Fließen des Bestrebens nothwendig von dem Gesetze der Fluente abhängig seyn muß, und umgekehrt, so läßt sich auch schon im voraus schließen, daß es eine arithmetische Regel geben müsse, nach welcher man aus der Function der Fluente die des Bestrebens ableiten kann, und umgekehrt. Man wird im Nachfolgenden sehen, daß zur Anwendung dieser Regeln schon alles vorbereitet ist.

Wenn man beim gleichförmigen Fließen nur weiß, wie viel sich die Fluente bei einer Gelegenheit verändert hat, so hat man das vollständige Gesetz derselben erkannt. Denn, so wie sich diese Veränderung zu a, ihrer Gelegenheit, verhält, eben so verhält sich auch definitionsmäßig jede andere Veränderung zu ihrer Gelegenheit. Das constante Bestreben zu fließen wird man erkennen, wenn man eine gewisse Veränderung mit der Größe der Gelegenheit, während welcher jene hervorgebracht worden war, vergleicht.

Eine gleichförmige Fluente, deren Gleichung allgemein:

$$y = a + bx$$

sey, so, daß hier also y derjenige Zustand der Fluente ist, in welchen sie nach Verfluß der Gelegenheit x kommen mußte, bekomme nun von diesem allgemein betrachteten Zustande an eine fernere Gelegenheit zu fließen $= \Delta x$, so hat man:

$$y + \Delta y = a + bx + b\Delta x \text{ also}$$

$$\Delta y = b\Delta x$$

d. h. die Veränderung, welche y, die Fluente, während der Gelegenheit Δx erhielt, ist $= b\Delta x$. Vergleicht man nun diese Veränderung Δy mit der Gelegenheit Δx, so erhält man das Bestreben, welches also

$$= \frac{b\Delta x}{\Delta x} = b$$

gefunden wird.

Hat man daher die Gleichung:

$$y = a + bx$$

so ist die constante Größe b, oder der Coefficient von x, die Größe des Bestrebens, welche die durch die Gleichung ausgedrückte Fluente überall besitzt.

Kennt man daher das Bestreben für eine gleichförmige Fluente, so kann man leicht jede Veränderung derselben finden, indem man nur nöthig hat, das Bestreben mit der Gelegenheit zu multipliciren.

Die ursprüngliche Gelegenheit, welche zu allem Fließen erforderlich ist, die Zeit, ist selbst eine Fluente, aber die allereinfachste, welche gedacht werden kann; sie ist eine gleichförmige, deren constantes Bestreben zur Einheit angenommen wird, und diejenige, mit welcher man alle übrigen vergleicht, indem man beide zugleich fließen läßt.

§. 106.

Das ungleichförmige Fließen ist, wie oben gezeigt, ein solches, bei welchem das Bestreben zu fließen selbst fließt. So wie aber jedes Fließen zunächst entweder ein Wachsen, oder ein Abnehmen seyn kann, so werden also alle ungleichförmigen Fluenten zuerst in solche zerfallen, deren Bestreben zu fließen entweder zunimmt, oder abnimmt. Im ersten Falle, heißt die Fluente accelerirend, im andern retardirend.

§. 107.

Wenn sich eine Fluente in einem gewissen Zustande befindet, und daselbst ein Bestreben zu wachsen, d. h. ein Bestreben besitzt, diesen Zustand zu vergrößern, so nennt man dieses Bestreben, den Begriffen des Widerstreitenden gemäß, mit jenem Zustande dem Zeichen nach einstimmig; wenn jenes Bestreben aber ein Bestreben abzunehmen ist, d. h. ein Bestreben, diesen Zustand zu vermindern, so wird man dasselbe mit jenem Zustande widerstreitend nennen.

Ist z. B. die Ordinate einer Curve in einem gewissen positiven Zustande, und hat sie in demselben ein Bestreben zu wachsen, so ist dieses gleichfalls positiv, ist es aber ein Bestreben abzunehmen, so ist es negativ. Ist hingegen die Ordinate in einem negativen Zustande, und hat sie hier ein Bestreben zu wachsen, d. h. noch größere negative Werthe anzunehmen, so ist dieses Bestreben negativ, ist es aber ein Bestreben abzunehmen, positiv.

So lange daher eine Fluente wirklich gewachsen ist, so lange ist auch ihr Bestreben mit den durchlaufenen Zuständen einstimmig gewesen; so lange hingegen die Fluente abnahm, so lange war ihr Bestreben mit jenen Zuständen widerstreitend.

§. 108.

Grundsatz.

Wenn jeder von zwei Fluenten, eine gleich große Gelegenheit zu fließen gegeben wird, und die Zustände, worin sich das Bestreben der einen während dieser Gelegenheit befindet, immer größer sind, als die gleichzeitigen Zustände, in welche das Bestreben der andern Fluente während derselben Gelegenheit kömmt; so hat sich die erste überall während dieser Gelegenheit mehr verändert, als es die andere gleichzeitig vermochte.

§. 109.

Lehrsatz.

Wenn eine Fluente während einer Gelegenheit zu fließen überall ein größeres Bestreben besitzt, als es gleichzeitig mit einer anderen während dieser Gelegenheit der Fall ist, beide aber nach Verfluß derselben zu einem gleichen Zustande A gelangen; so müssen die Zustände, worin sich

die erste während der Gelegenheit befindet, immer entfernter von A seyn, als die gleichzeitigen Zustände, welche die andere während derselben Gelegenheit durchläuft.

Dieses folgt unmittelbar aus dem Grundsatze des vorhergehenden §.

Wenn daher beide Fluenten wachsen, so befindet sich die, deren Bestreben stets größer ist, als das gleichzeitige der anderen, überall während jener Gelegenheit in kleineren Zuständen, als es bei der anderen gleichzeitig der Fall ist. Wenn aber beide Fluenten abnehmen, so sind die Zustände derjenigen, deren Bestreben stets größer war, während der Gelegenheit immer größer, als die gleichzeitigen Zustände der andern.

§. 110.

Lehrsatz.

Wenn zwei Fluenten, von demselben Zustande A an, in welchem sie gleiches Bestreben zu fließen haben, so fließen, daß sich die eine im Fortgange mit Gleichförmigkeit, die andere mit Acceleration ändert, so wird sich diese, so lange nämlich jenes Fließen dauert, überall in von A entfernteren Zuständen befinden, als es mit der gleichförmigen Fluente gleichzeitig der Fall seyn kann.

Denn die accelerirende Fluente hatte überall, während das Fließen beider Statt gefunden hat, ein größeres Bestreben, als die gleichförmige es gleichzeitig besaß, da diese das anfängliche Bestreben stets beibehielt, jene aber, welche anfänglich dasselbe Bestreben haben sollte, es stets vergrößerte; folglich hat sich die accelerirende Fluente überall mehr geändert, als die andere es gleichzeitig vermochte, (§. 108.) d. h. sie ist während dieser Gelegenheit stets in von A entfernteren Zuständen gewesen, als es gleichzeitig mit der gleichförmigen der Fall war.

Wenn also beide Fluenten wachsen, (denn, wenn sie anfänglich gleiches Bestreben haben sollen, so kann die eine nicht wachsen und die andere abnehmen,) so wird die accelerirend wachsende überall in größeren Zuständen fließen, als es die andere gleichzeitig vermag.

Wenn beide Fluenten abnehmen, so wird die accelerirend abnehmende überall in kleineren Zuständen seyn, als es gleichzeitig mit der andern der Fall seyn kann.

§. 111.

Lehrsatz.

Wenn zwei Fluenten von einem und demselben Zustande aus ein gleiches Bestreben zu fließen besitzen, die eine aber im Fortgange mit Retardation, die andere mit Gleichförmigkeit fließt; so wird sich die erste überall, während dieses geschiehet, in dem A näheren Zuständen befinden, als es mit der anderen gleichzeitig der Fall seyn kann.

Denn während jeder beliebigen Gelegenheit, wird die retardirende Fluente überall ein kleineres Bestreben gehabt haben, als es gleichzeitig mit der gleichförmigen der Fall war, indem diese das anfängliche Bestreben nicht veränderte, jene aber ihr anfängliches Bestreben, welches mit dem der gleichförmigen einerlei seyn sollte, stets verminderte; folglich hat sich die gleichförmige Fluente überall mehr verändert, als die retardirende es gleichzeitig thun konnte, (§. 108.) d. h. sie ist überall in von A entfernteren Zuständen gewesen, als gleichzeitig die retardirende, oder, welches einerlei ist, diese durchfließt überall dem Zustande A nähere Zustände, als gleichzeitig die andere.

Wenn daher beide Fluenten wachsen, so wird bei der obigen Bedingung die retardirend wachsende im Fortgange stets in kleineren Zuständen seyn, als diese gleichzeitig.

Wenn aber beide Fluenten abnehmen, so wird die retardirend abnehmeude im Fortgange stets in größeren

Zuständen fließen, als diese es gleichzeitig vermag.

§. 112.

Lehrsatz.

Wenn zwei Fluenten, wovon die eine mit Gleichförmigkeit, die andere mit Acceleration fließt, nach einer gewissen Gelegenheit zu einem gleichen Zustande, A, gelangt sind, und in diesem Zustande gleiches Bestreben zu fließen erhalten; so wird sich die accelerirende während jener Gelegenheit stets in Zuständen befunden haben, welche dem Zustande A näher liegen, als die gleichzeitigen Zustände der gleichförmigen Fluente.

Denn die accelerirend fließende besaß überall während der Gelegenheit ein geringeres Bestreben, als gleichzeitig die gleichförmige, da erst nach Verlauf der Gelegenheit das Bestreben der ersteren so herangewachsen seyn soll, daß es dem stets gleichen Bestreben der gleichförmigen Fluente gleich ist; folglich sind die Zustände, worin sich die gleichförmige während der Gelegenheit befand, überall entfernter von A, als die gleichzeitigen Zustände, welche die accelerirende durchfließen mußte. (§. 109.)

Wenn daher beide Fluenten wachsen, so wird die accelerirend wachsende überall in größeren Zuständen gewesen seyn, als gleichzeitig die gleichförmige; wenn aber beide abnehmen, so wird die accelerirend abnehmende überall in kleineren Zuständen gewesen seyn, als gleichzeitig die andere.

§. 113.

Lehrsatz.

Wenn zwei Fluenten, wovon die eine mit Gleichförmigkeit, die andere mit Retardation fließt, nach Verfluß einer gewissen Gelegenheit zu einem gleichen Zustande, A, gelangten, in welchem das Bestreben beider gleich geworden ist; so wird die retardirende Fluente überall während dieser Gelegenheit in Zuständen gewesen seyn, welche von A entfernter lagen, als die gleichzeitigen Zustände, worin sich die andere befand.

Die retardirende Fluente besaß während der Gelegenheit überall ein größeres Bestreben, als die andere gleichzeitig; denn erst am Ende der Gelegenheit hatte das Bestreben der retardirenden so viel abgenommen, daß es dem der gleichförmigen gleich war. Folglich befand sich jene überall während der Gelegenheit in Zuständen, welche von dem Zustande A entfernter liegen, als die gleichzeitigen Zustände der gleichförmigen Fluente (§. 109.)

Wenn daher beide Fluenten wachsen, so wird sich die retardirend wachsende während der Gelegenheit überall in kleineren Zuständen befunden haben, als gleichzeitig die gleichförmige; wenn sie hingegen beide abnahmen, so durchlief die retardirend abnehmende überall während der Gelegenheit größere Zustände, als gleichzeitig die andere.

§. 114.

Lehrsatz.

Wenn das Gesetz für eine beliebige Fluente gegeben ist,

$$y = \varphi(x)$$

so ist für jeden beliebigen Zustand derselben, oder, welches einerlei ist, für jede beliebige Gelegenheit x, die Größe des Bestrebens dem ersten Differentialverhältnisse von y oder $\varphi(x)$ gleich, wenn man dieses für dieselbe Gelegenheit, oder für dasselbe x berechnet.

Zum Beweise dieses Satzes, des wichtigsten im Fluentencalcul, bedürfen wir einiger Prämissen.

I. Es sey die Function für eine Fluente oder der allgemeine arithmetische Ausdruck ihres Gesetzes:

$$y = \varphi(x)$$

d. h. die Fluente ist allgemein für die Gelegenheit x zu dem Zustande y gelangt. Wird ihr von diesem allgemein betrach=

teten Zustande an eine neue Gelegenheit $= \triangle x$ ertheilt, so findet man nach dem Vorhergehenden:

$$y + \triangle y = \varphi(x + \triangle x) \text{ und}$$

$$\triangle y = \frac{dy}{\triangle x} \triangle x + \frac{d^2 y}{1.2.\triangle x^2} \triangle x^2 \ldots \frac{d^r y}{1.2..r\triangle x^r} \triangle x^r \ldots$$

Soll nun die Fluente von dem Zustande y an das Bestreben haben zu wachsen, d. h. fähig seyn, so wie sie aus diesem Zustande hervortritt, oder so wie die neue Gelegenheit $\triangle x$ von o an zu fließen beginnt, mit y einstimmige Incremente $\triangle y$ anzunehmen; so muß das erste Glied der Reihe für $\triangle y$, (welches für diese anfänglicheren Zustände von $\triangle x$ die übrigen an Größe beiweitem übertrifft,) d. h. also der Coefficient dieses Gliedes mit $\triangle y$ also auch mit y einstimmig seyn. Soll hingegen die Fluente von dem Zustande y an das Bestreben haben abzunehmen, d. h. fähig seyn mit y widerstreitende Incremente $\triangle y$ anzunehmen, so muß, indem $\triangle x$ von o an in reelle Werthe eintritt, so, daß also das erste Glied von $\triangle y$ mit $\triangle y$ einstimmig seyn muß, der Coefficient dieses Gliedes mit dem Zustande y widerstreitend seyn.

So lange daher eine Fluente wirklich wächst, so lange ist das erste Differentialverhältniß mit den durchlaufenen Zuständen einstimmig; so lange sie hingegen abnimmt, so lange ist jenes mit den zugehörigen Zuständen widerstreitend.

II. Man gedenke sich zwei Fluenten, eine gleichförmige und allgemein eine ungleichförmige, gleichviel, ob sie mit Acceleration, oder mit Retardation fließt. Für eine gewisse Gelegenheit mögen beide zu einem gleichen Zustande, A, gekommen seyn, und in demselben ein gleiches Bestreben zu fließen erlangt haben, darauf aber, jede ihrem Gesetze folgend, wieder weiter fließen. Ist die ungleichförmige Fluente accelerirend, und wachsen beide, so ist sie nach §. 112. vor dem Zustande A stets in größeren Zuständen gewesen, als die gleichförmige gleichzeitig; nach dem Zustande wird es nach §. 110. derselbe Fall gewesen seyn, so, daß die accelerirende sowohl vor, als nach dem Zustande A in größeren Zuständen fließt, als es gleichzeitig mit der gleichförmigen der

Fall ist, und nur den einzigen Zustand A haben beide mit einander gemein.

Wenn man also, während beide Fluenten fließen, immer auf den Unterschied ihrer gleichzeitigen Zustände achtet, indem man z. B. von dem jedesmaligen Zustande der accelerirenden den gleichzeitigen der gleichförmigen abziehet, oder umgekehrt; so sind diese Unterschiede überall vor und nach dem Zustande A mit einander einstimmig, indem das Minuendum stets größer oder kleiner bleibt, als das Subtrahendum.

Eben so mag die ungleichförmige Fluente mit Retardation fließen, wachsen, oder abnehmen, diejenige von beiden Fluenten, welche vor dem Zustande A in größeren Zuständen war, als gleichzeitig die andere, die wird auch überall, wie aus den Lehrsätzen §. 110 bis §. 113. erhellet, nach jenem Zustande in größeren Zuständen fließen, als es gleichzeitig mit der andern der Fall ist, so, daß also überall die Unterschiede beider Fluenten, welche selbst wieder eine gesetzmäßig wachsende, von einer Gelegenheit abhängende Größe, oder eine Fluente ist, vor und nach dem Zustande A mit einander einstimmig seyn müssen.

Nach diesen Erörterungen ist es leicht jenen Lehrsatz zu erweisen.

Man gedenke sich allgemein eine ungleichförmige Fluente, deren Gesetz durch die Gleichung:

$$y = \varphi(x)$$

ausgedrückt wird, so, daß sie nach der Gelegenheit x in dem Zustande y ist. In diesem allgemein betrachteten Zustande soll das Bestreben, welches von x oder der Gelegenheit für den Zustand y der Fluente abhängig seyn wird, erkannt werden. Gleichzeitig mit dieser Fluente mag auch noch eine gleichförmige fließen, welche für dieselbe Gelegenheit, x, mit der andern zu demselben Zustande, y, gekommen seyn mag, in welchem beide ein gleiches Bestreben zu fließen erlangt haben mögen. Ist das constante Bestreben der gleichförmig fließenden $= a$, so wird die andere angenommenermaßen in dem Zustande y dasselbe Bestreben, a, haben. Die Gleichung für die gleichförmige Fluente muß so seyn, daß der Coefficient von x, jene Größe a ist, (§. 105.) so, daß man sie setzen kann:

$$Z = b + a\,x.$$

Betrachtet man nun die Unterschiede gleichzeitiger Zustände beider, so bilden diese eine neue Fluente, welche v heißen mag, und deren Zustände, wie wir eben gesehen haben, vor und nach dem Zustande y mit einander einstimmig seyn müssen.

Die Gleichung für v ist also:

$$v = \mp (\varphi(x) - (b + ax))$$

Der Lauf von v ist nun folgender: vor dem Zustande y der anfänglichen Fluente mußte v abnehmen, denn die beiden Fluenten näherten sich einander; für den Zustand y ist v = o; nach diesem Zustande wächst v wieder, und zwar durchläuft es Zustände, welche mit denen vor y einstimmig sind. (II.)

So lange aber eine Fluente abnimmt, so lange ist, wie wir oben sahen, ihr erstes Differentialverhältniß mit den Zuständen widerstreitend, so lange sie aber zunimmt, einstimmig. Das erste Differentialverhältniß von v, oder $\frac{dv}{\Delta x}$ ist also vor dem Zustande y mit den Zuständen von v widerstreitend, nach jenem Zustande damit einstimmig; die Zustände von v vor und nach y sind aber mit einander einstimmig, folglich sind die Zustände von $\frac{dv}{\Delta x}$ vor y mit denen nach y widerstreitend, oder, die Fluente, welche durch die von x abhängige Function $\frac{dv}{\Delta x}$ dargestellt wird, befindet sich, indem die anfänglichen Fluenten im Zustande y sind, in solchem Zustande, wo sie grade im Begriff ist, aus dem Positiven zum Negativen, oder umgekehrt, überzugehen, d. h. sie befindet sich nach §. 101. im Nullzustande. Ist also die anfängliche Fluente im Zustande y, so ist $\frac{dv}{\Delta x} = o$. Da aber

$$v = \mp (\varphi(x) - (b + ax)),$$

so hat man:

$$dv = \mp (d\varphi(x) - a\Delta x.)$$

$$\frac{dv}{\Delta x} = \mp \left(\frac{d\varphi(x)}{\Delta x} - a\right)$$

soll dieses = o seyn, so ist:

$$a = \frac{d\varphi(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{\Delta x}$$

Nun ist aber, wie angenommen wurde, a die Größe des Bestrebens der Fluente im Zustande y, $\frac{dy}{\Delta x}$ aber das erste

Differentialverhältniß für denselben Zustand, also hat man für dieses den allgemeinen Ausdruck $\frac{d\varphi\,(x)}{\Delta x}$.

Ist daher das arithmetisch ausgedrückte Gesetz für eine beliebige Fluente gegeben:

$$y = \varphi\,(x),$$

so ist das Gesetz für das Bestreben, w:

$$w = \frac{dy}{\Delta x}.$$

Dieses kann also für jeden Zustand der Fluente jetzt dargestellt werden, indem man nur nöthig hat, das erste Differentialverhältniß zu berechnen, und in dasselbe, als eine Function von x, für x den Werth zu substituiren, welcher zu dem Zustande der Fluente führt, für welchen man das Bestreben zu fließen bestimmen wollte. Beide Fluenten y und w, welche von einerlei Gelegenheit, x, abhängen, fließen gleichzeitig, und die Zustände von w drücken das Bestreben der gleichzeitigen Zustände von y aus.

§. 115.

Ist die Fluente eine gleichförmige, $y = b + ax$, so findet man das Bestreben gleichfalls durch Differentiation: $\frac{dy}{\Delta x} = a$.

Ist die Fluente ungleichförmig, also das Bestreben selbst noch eine Fluente, so muß auch diese in jedem Zustande wieder ein Bestreben haben, womit sie sich ändert, und ist die Function für sie

$$w = \frac{dy}{\Delta x} = \psi\,(x),$$

so ist das Bestreben, womit sich w, oder das Bestreben der Fluente ändert,

$$= \frac{dw}{\Delta x} = \frac{d\psi\,(x)}{\Delta x} = \frac{d\left(\frac{dy}{\Delta x}\right)}{\Delta x} = \frac{d^2 y}{\Delta x^2}$$

Hängt auch dieses noch von x ab, oder ist es noch eine Fluente, so ist ihr Bestreben wieder das erste Differentialverhältniß aus $\frac{d^2 y}{\Delta x^2}$,

$$= \frac{d\left(\frac{d^2 y}{\Delta x^2}\right)}{\Delta x} = \frac{d^3 y}{\Delta x^3}$$

u. s. f.

In der Analysis hat das Differentialverhältniß, als der Coefficient des ersten Gliedes der Reihe für das Increment der Function, so wie die Function, als ein aus einer oder mehreren Hauptgrößen arithmetisch zusammengesetzter Ausdruck, und endlich auch die Hauptgröße selbst, als bloßes Zeichen für eine Größe, für welche man sich vornimmt, successiv andere und andere Werthe zu substituiren, nur eine formale Bedeutung; im Fluentencalcul hingegen nimmt sowohl die Hauptgröße, als auch die Function und das Differentialverhältniß eine materiale Bedeutung an, indem die erste die Gelegenheit zu fließen, die zweite den Ausdruck des Gesetzes der Fluente und endlich das letzte das Gesetz für das Bestreben zu fließen darstellt.

§. 116.

Lehrsatz.

Wenn eine Fluente abnehmend bis zum Nullzustande gekommen ist, und, so wie sie aus demselben hervortritt, wieder wächst, jedoch so, daß diese Zustände mit denen vor dem Nullzustande einstimmig sind; so muß das erste der successiven Differentialverhältnisse, welches für den Nullzustand der Fluente wieder reell wird, von paarem Range, und zugleich mit den Zuständen der Fluente vor und nach dem Nullzustande einstimmig seyn.

Da die Fluente vor dem Nullzustande abnahm, so ist hier $\frac{dy}{\Delta x}$ mit den durchlaufenen Zuständen widerstreitend; (§. 107.) da sie ferner nach dem Nullzustande wieder zunahm, so ist hier $\frac{dy}{\Delta x}$ mit den Zuständen einstimmig, (§. 107.). Nun sollten aber die Zustände der Fluente vor dem Nullzustande mit denen nach demselben einstimmig seyn, folglich sind die Zustände von $\frac{dy}{\Delta x}$ vor jenem Zustande mit denen nach demselben widerstreitend, d. h. $\frac{dy}{\Delta x}$ ist für den Nullzustand der Fluente selbst $= 0$. (§. 101.) Da ferner $\frac{dy}{\Delta x}$ vor dem Nullzustande abnehmen mußte, indem es sonst nicht zu 0 gelangen konnte, so ist hier $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ mit $\frac{dy}{\Delta x}$ widerstreitend, (§. 107.) d. h. mit y einstimmig; da aber $\frac{dy}{\Delta x}$ nach dem Nullzustande der Fluente wieder zunehmen mußte, indem es aus dem Nullzustande hervorging, so ist hier $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig, d. h. auch mit den Zuständen der Fluente nach dem Nullzustande einstimmig. Es war daher $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ vor und nach dem Nullzustande der Fluente mit den gleichzeitigen Zuständen der Fluente einstimmmig, und also, da diese überall einstimmig angenommen sind, auch stets unter sich einstimmig. Im Nullzustande der Fluente kann also $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ wohl selbst $= 0$, aber nicht mit den Zuständen vor und nach dem Nullzustande der Fluente widerstreitend seyn. (§. 102. am Ende.)

Nimmt man nun den Fall an, daß $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ für den Nullzustand der Fluente selbst $= 0$ ist, so findet jetzt mit $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ ganz dasselbe Siatt, wie mit der Fluente y, da $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ vor und nach dem Nullzustande einstimmig ist; d. h. es muß nothwendig $\frac{d^3y}{\Delta x^3} = 0$ seyn, während $\frac{d^4y}{\Delta x^4}$ entweder mit den Zuständen von $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ vor und nach dem Zustande der Fluente einstimmig, oder selbst wieder $= 0$ ist, in welchem Falle sich das Vorhergehende wiederholt. Findet man allgemein, daß auf diese Weise successiv alle Differentialverhältnisse bis zum $2n-1$ten $= 0$ geworden sind, so muß auch dieses $2n-1$te nach 0 werden, und das $2n$te wird mit den Zuständen der Fluente vor und nach ihrem Nullzustande einstimmig seyn.

§. 117.

Lehrsatz.

Findet man das erste Differentialverhältniß aus der Gleichung einer Fluente gezogen, für einen gewissen Zustand, A, derselben mit diesem einstimmig, so ist die Fluente wachsend angekommen, und wird wachsend weiter fließen. Ist hingegen das erste Differentialverhältniß mit dem zugehörigen Zustande, A, der Fluente widerstreitend, so ist die Fluente abnehmend zu diesem Zustande gekommen, und wird abnehmend weiter fließen.

Wenn die Fluente in dem Zustande A ist, so sey der gleichzeitige Zustand des Bestrebens = B. Ist nun das Bestreben B mit A einstimmig, so war dieses auch in den vorhergehenden und nachfolgenden Zuständen der Fall, (§. 102.), indem also die Fluente im Zustande A ankam, hatte sie ein mit sich selbst einstimmiges Bestreben gehabt, d. h. ein Bestreben zu wachsen, sobald sie darauf den Zustand A wieder verläßt, so besitzt sie in den Zuständen, in welche sie sogleich übergehet, gleichfalls ein mit sich einstimmiges Bestreben d. h. ein Bestreben zu wachsen, und ist also wachsend angekommen und wird wachsend weiter fließen.

Eben so folgt, wenn das Bestreben der Fluente in jenem Zustande A mit A widerstreitend ist, daß sie abnehmend zu demselben gekommen war, und abnehmend weiter fließen wird.

Findet man für den Zustand A, $\frac{dy}{\Delta x} = 0$, so sind beide Fälle gleich möglich, denn $\frac{dy}{\Delta x}$ kann in den vorhergehenden Zuständen mit der Fluente einstimmig gewesen seyn, im Zustande selbst $= 0$ und darauf wieder mit y einstimmig werden; es kann auch zuerst mit der Fluente y widerstreitend gewesen seyn, im Zustande selbst $= 0$, und in den nachfolgenden Zuständen wieder mit der Fluente widerstreitend werden. Im ersten Falle kam die Fluente wachsend an und ging wachsend weiter, im andern kam sie abnehmend an und ging abnehmend fließend weiter. Aus $\frac{dy}{\Delta x}$, welches hier $= 0$

ist, läßt sich also nicht entscheiden, welcher Fall eintritt, dieses wird aber aus den folgenden Differentialverhältnissen erkannt.

1) Soll die Fluente in dem Zustande, in welchem $\frac{dy}{\Delta x} = 0$ ist, wachsend angekommen seyn, und wachsend weiter fließen, so ist erfoderlich, daß $\frac{dy}{\Delta x}$ vor und nach diesem Zustande mit der Fluente einstimmig sey; folglich muß das erste der folgenden Differentialverhältnisse von $\frac{dy}{\Delta x}$, welches für jenen Zustand wieder reell wird, von paarem Range, und zwar mit $\frac{dy}{\Delta x}$ vor und nach dem Zustande, d. h. auch mit der Fluente einstimmig seyn. §. 116. Es ist aber das 2nte Differentialverhältniß von $\frac{dy}{\Delta x}$ das $2n+1$te von y oder der Fluente.

2) Soll die Fluente in dem Zustande, worin $\frac{dy}{\Delta x} = 0$ ist, abnehmend angekommen seyn, und abnehmend weiter fließen, so muß $\frac{dy}{\Delta x}$ vor und nach diesem Zustande mit der Fluente widerstreitend seyn; folglich muß das erste der nachfolgenden Differentialverhältnisse von $\frac{dy}{\Delta x}$, welches für diesen Zustand wieder reell wird, von paarem Range, und zugleich mit $\frac{dy}{\Delta x}$ vor und nach jenem Zustande einstimmig, (§. 116.) d. h. mit der Fluente widerstreitend seyn. Es ist aber das 2nte Differentialverhältniß von $\frac{dy}{\Delta x}$ das $2n+1$te von y oder der Fluente.

Findet man also allgemein, daß das erste reell werdende Differentialverhältniß aus der Gleichung für eine Fluente gezogen, für einen gewissen Zustand die Fluente von unpaarem Range ist, so wird sie zu diesem Zustande wachsend angekommen seyn und zugleich wachsend weiter fließen, wenn dasselbe mit dem Zustande der Fluente einstimmig ist; sie wird hingegen abnehmend angekommen seyn, und abnehmend weiter fließen, wenn jenes mit dem Zustande der Fluente widerstreitend ist.

Findet man aber, daß das Differentialverhältniß, welches für einen Zustand der Fluente zuerst reell wird, von paarem Range ist; so kann die Fluente weder wachsend angekommen seyn, und zugleich wachsend weiter fließen, nach abnehmend angekommen seyn, und zugleich abnehmend weiter fließen, wie wir so eben bewiesen haben.

§. 118.

Lehrsatz.

So lange eine Fluente mit Acceleration fließt, so lange ist $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig; so lange eine Fluente mit Retardation fließt, so lange ist $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ mit $\frac{dy}{\Delta x}$ widerstreitend.

Denn so lange eine Fluente mit Acceleration fließt, so lange wächst das Bestreben zu fließen (§. 106.). So lange aber diese Fluente $\left(\frac{dy}{\Delta x}\right)$ wächst, so lange ist ihr Bestreben $\left(\frac{d^2y}{\Delta x^2}\right)$ mit ihr selbst einstimmig. (§. 107.)

So lange hingegen eine Fluente mit Retardation fließt, so lange muß ihr Bestreben zu fließen, welches $= \frac{dy}{\Delta x}$ ist, abnehmen; (§. 106.) so lange aber diese Fluente $\left(\frac{dy}{\Delta x}\right)$ abnimmt, so lange muß ihr Bestreben $\left(\frac{d^2y}{\Delta x^2}\right)$ mit ihr selbst widerstreitend seyn. (§. 107.)

§. 119.

Lehrsatz.

Findet man für einen gewissen Zustand einer Fluente das zweite Differentialverhältniß mit dem ersten einstimmig, so ist die Fluente accelerirend fließend angekommen, und wird accelerirend weiter fließen; findet man das zweite Differentialverhältniß mit dem ersten widerstreitend, so ist die Fluente in diesem Zustande retardirend fließend angekommen, und fließt retardirend weiter.

Denn ist für einen gewissen Zustand der Fluente $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig, so war es dieses auch in den vorhergehenden und nachfolgenden Zuständen; (§. 102.) folglich kam die Fluente accelerirend an, und gehet accelerirend weiter. (§. 118). Ist hingegen $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ mit $\frac{dy}{\Delta x}$ widerstreitend, so fand dieses auch bei den vorhergehenden und nachfolgenden Zuständen Statt, (§. 102.) und die Fluente kam also retardirend an und gehet retardirend weiter. (§. 118.)

Findet man für einen Zustand der Fluente $\frac{d^2y}{\Delta x^2} = 0$, so sind beide Fälle möglich, denn $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ kann vor dem Zustande mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig gewesen seyn, in dem Zustande selbst $= 0$, und darauf wieder mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig werden, es kann auch zuerst mit $\frac{dy}{\Delta x}$ widerstreitend gewesen seyn, im Zustande selbst $= 0$ und darauf wieder mit $\frac{dy}{\Delta x}$ widerstreitend werden. Im ersten Falle kam die Flnente accelerirend an, und ging accelerirend weiter, im andern Falle kam sie retardirend an und ging retardirend weiter. Welcher Fall also eintritt, läßt sich aus dem zu 0 gewordenen zweiten Differentialverhältnisse nicht bestimmen, und kann erst aus den nachfolgenden erkannt werden.

1. Ist die Fluente, zu einem Zustande, für welchen $\frac{d^2y}{\Delta x^2} = 0$ ist, accelerirend angekommen, und soll sie accelerirend weiter fließen, so, daß also $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ vor und nach dem Zustande mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig ist; so muß das erste der folgenden Differentialverhältnisse von $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$, welches für diesen Zu=

stand wieder reell wird, von paarem Range, und mit $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ vor und nach dem Zustande, also auch mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig seyn. (§. 116.) Ein Differentialverhältniß von $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ von paarem Range ist, aber auch ein Differentialverhältniß von y oder der Fluente von paarem Range.

2. Ist die Fluente retardirend zu dem Zustande gekommen, in welchem $\frac{d^2y}{\Delta x^2} = 0$ ist, und soll sie retardirend weiter fließen, so muß $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ vor und nach diesem Zustande mit $\frac{dy}{\Delta x}$ widerstreitend seyn, und das erste der nachfolgenden Differentialverhältnisse von $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$, welches für jenen Zustand wieder reell wird, muß also von paarem Range und zugleich mit $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ vor und nach dem Zustande einstimmig (§. 116.) d. h. mit $\frac{dy}{\Delta x}$ widerstreitend seyn. Aber ein Differentialverhältniß von $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ von paarem Range, ist auch ein Differentialverhältniß von y oder der Flueute von paarem Range.

Ist daher allgemein das erste der nach $\frac{dy}{\Delta x}$ folgenden Differentialverhältnisse von y, welches wieder reell wird, von paarem Range, so ist die Fluente accelerirend angekommen und wird accelerirend weiter fließen,. wenn jenes mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig ist, sie wird hingegen retardirend angekommen seyn und retardirend weiter fließen, wenn jenes mit $\frac{dy}{\Delta x}$ widerstreitend ist.

Ist also das erste der nach $\frac{dy}{\Delta x}$ folgenden Differentialverhältnisse, welches wieder reell wird, von unpaarem Range, so kann die Fluente zu dem Zustande nicht accelerirend gekommen seyn, und zugleich accelerirend weiter fließen, oder retardirend angekommeu seyn, und zugleich retardirend weiter fließen.

§. 120.

Lehrsatz.

Wenn eine Fluente aus einem accelerirenden Fließen in ein retardirendes übergehet, so ist für den Zustand des Ueberganges $\frac{d^2y}{\Delta x^2} = 0$, und $\frac{d^3y}{\Delta x^3}$ kann mit $\frac{dy}{\Delta x}$ nicht einstimmig seyn. Wenn eine Fluente aus einem retardirenden Fließen in ein accelerirendes übergehet, so ist für den Zustand des Ueberganges gleichfalls $\frac{d^2y}{\Delta x^2} = 0$, aber $\frac{d^3y}{\Delta x^3}$ kann mit $\frac{dy}{\Delta x}$ nicht widerstreitend seyn.

1. Befindet sich die Fluente in einem Zustande, wo sie aus einem accelerirenden Fließen in ein retardirendes übergehet, so war in den vorhergehenden Zuständen $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig, in den nachfolgenden wird es damit widerstreitend, (§. 118.) und da die vorhergehenden Zustände von $\frac{dy}{\Delta x}$ mit den nachfolgenden von $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig sind, (§. 102.) so sind die vorhergehenden Zustände von $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ mit den nachfolgenden von $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ widerstreitend; folglich ist für den Zustand selbst $\frac{d^2y}{\Delta x^2} = 0$. (§. 101.) Da ferner $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ in den vorhergehenden Zuständen abnehmen mußte, indem es sonst nicht zu 0 kommen konnte, so war für diese Zustände $\frac{d^3y}{\Delta x^3}$ mit $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ widerstreitend (§. 107.), und da hier $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ wegen der Acceleration mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig ist, so war auch für diese Zustände $\frac{d^3y}{\Delta x^3}$ mit $\frac{dy}{\Delta x}$ widerstreitend. Da ferner $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ in den nachfolgenden Zuständen von 0 an wieder zunahm, so ist hier $\frac{d^3y}{\Delta x^3}$ mit $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ einstimmig, (§. 107.) also mit $\frac{dy}{\Delta x}$ widerstreitend, da für diese Zustände $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ mit $\frac{dy}{\Delta x}$ wegen der Re=

tardation widerstreitend ist. Es ist also $\frac{d^3 y}{\Delta x^3}$ in den vorhergehenden und nachfolgenden Zuständen mit $\frac{dy}{\Delta x}$ widerstreitend, und kann daher im Zustande des Ueberganges selbst wohl $= 0$, aber nicht mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig seyn. (§. 102. am Ende.)

2. Wenn die Fluente von einem retardirenden Fließen in ein accelerirendes übergehet, so ist in den vorhergehenden Zuständen $\frac{d^2 y}{\Delta x^2}$ mit $\frac{dy}{\Delta x}$ widerstreitend, in den nachfolgenden aber mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig, (§. 118.) und also, da $\frac{dy}{\Delta x}$ in den vorhergehenden und nachfolgenden Zuständen mit sich einstimmig ist (§. 102.), ist $\frac{d^2 y}{\Delta x^2}$ in den vorhergehenden Zuständen mit sich selbst in den nachfolgenden Zuständen widerstreitend, d. h. im Zustande selbst $= 0$. (§. 101). Weil nun ferner $\frac{d^2 y}{\Delta x^2}$ in den vorhergehenden Zuständen nothwendig abnehmen mußte, indem es sonst nicht zu 0 kommen konnte, so ist hier $\frac{d^3 y}{\Delta x^3}$ mit $\frac{d^2 y}{\Delta x^2}$ widerstreitend. (§. 107). Folglich mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig, da wegen der Retardation $\frac{d^2 y}{\Delta x^2}$ mit $\frac{dy}{\Delta x}$ widerstreitend ist. Da ferner $\frac{d^2 y}{\Delta x^2}$ in den nachfolgenden Zuständen von 0 an zunahm, so ist $\frac{d^3 y}{\Delta x^3}$ mit $\frac{d^2 y}{\Delta x^2}$ einstimmig, und also auch mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig, da $\frac{d^2 y}{\Delta x^2}$ wegen der Acceleration mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig ist. Es ist daher $\frac{d^3 y}{\Delta x^3}$ in den vorhergehenden und nachfolgenden Zuständen mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig, und kann daher im Zustande selbst, also da, wo die Fluente aus dem retardirenden Fließen in ein accelerirendes übergehet, wohl $= 0$, aber nicht mit $\frac{dy}{\Delta x}$ widerstreitend seyn. (§. 102.) am Ende.)

Findet man aber, daß für den Zustand des Ueberganges $\frac{d^3 y}{\Delta x^3} = 0$ wird, wie es nach dem Vorhergehenden der Fall seyn kann, so sind, wie oben gezeigt wurde, beide Fälle möglich, und nur die folgenden Differentialverhältnisse können darüber entscheiden, welcher Fall eintritt.

1. Gehet die Fluente aus einem accelerirenden Fließen in ein retardirendes über, so, daß also $\frac{d^3y}{\Delta x^3}$ in den vorhergehenden und nachfolgenden Zuständen mit $\frac{dy}{\Delta x}$ widerstreitend ist, und soll es für diesen Zustand $= 0$ seyn; so muß das erste der folgenden Differentialverhältnisse von $\frac{d^3y}{\Delta x^3}$, welches für diesen Zustand wieder reell wird, von paarem Range, und zugleich mit den vorhergehenden und nachfolgenden Zuständen von $\frac{d^3y}{\Delta x^3}$, (welches in denselben mit $\frac{dy}{\Delta x}$ widerstreitend ist), einstimmig, (§. 116.) d. h. mit $\frac{dy}{\Delta x}$ widerstreitend seyn.

Ein Differentialverhältniß von $\frac{d^3y}{\Delta x^3}$ von paarem Range ist aber ein Differentialverhältniß von y oder der Fluente von unpaarem Range.

2. Gehet die Fluente von einem retardirenden Fließen in ein accelerirendes über, so, daß also $\frac{d^3y}{\Delta x^3}$ in den vorhergehenden und nachfolgenden Zuständen mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig ist, und soll $\frac{d^3y}{\Delta x^3}$ für diesen Zustand der Fluente selbst $= 0$ seyn; so muß nach §. 116. das erste der nachfolgenden Differentialverhältnisse von $\frac{d^3y}{\Delta x^3}$, welches für diesen Zustand wieder reell wird, von paarem Range und mit den vorhergehenden und nachfolgenden Zuständen von $\frac{d^3y}{\Delta x^3}$ d. h. auch mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig seyn. Aber es ist ein Differentialverhältniß von $\frac{d^3y}{\Delta x^3}$ von paarem Range ein Differentialverhältniß von y von unpaarem Range.

Allgemein muß also, wenn ein solcher Uebergang wirklich Statt finden soll, $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ immer $= 0$, und dasjenige der nun folgenden Differentialverhältnisse, welches für diesen Zustand zuerst wieder reell wird, von unpaarem Range seyn.

Ist dieses mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig, so geschiehet der Uebergang von der Retardation zur Acceleration, ist es hingegen mit $\frac{dy}{\Delta x}$ widerstreitend, so gehet die Fluente vom accelerirenden Fließen zum retardirenden über.

Um also zu erkennen, für welchen Werth von x ein solcher Uebergang Statt findet, setze man $\frac{d^2y}{\Delta x^2} = 0$, aus welcher Gleichung man den Werth für x, welcher ihr ein Genüge thut, finden kann. Bewirkt dieser Werth, daß das nächste nun reell werdende Differentialverhältniß von unpaarem Range ist, und mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig wird, so geschah der Uebergang vom retardirenden Fließen zum accelerirenden, umgekehrt, wenn es mit $\frac{dy}{\Delta x}$ widerstreitend gefunden wird. Bewirkt hingegen der Werth von x, welchen man aus der Gleichung $\frac{d^2y}{\Delta x^2} = 0$ zog, daß dasjenige der nachfolgenden Differentialverhältnisse, welches zuerst wieder reell wird, von paarem Range ist, so findet ein solcher Uebergang für jenen Werth von x nicht Statt.

Eine Fluente, deren Bestreben zu fließen $= 0$ ist, könnte, wenn ihr Gelegenheit zu fließen gegeben wird, nicht in andere Zustände übergehen, wenn nicht das zu 0 gewordene Bestreben selbst wieder ein Bestreben zu fließen hätte. Es ist daher gedenkbar, nicht allein, daß das Bestreben einer Fluente, sondern auch, daß das Bestreben des Bestrebens zu fließen $= 0$ werden, ja, daß das Nullseyn bis zum Bestreben eines beliebigen Ranges Statt finden könne; allein es ist nothwendig, wenn ein ferneres Fließen vor sich gehen soll, daß irgend ein Bestreben endlich wieder reell werde.

§. 121.

Wenn eine Fluente bis zu einem gewissen Zustande gewachsen ist, und von diesem Zustande an wieder abnimmt, so heißt derselbe ein **größester Werth** oder ein **Maximum**. Wenn eine Fluente bis zu einem gewissen Zustande abnahm, und von demselben an wieder wächst, so heißt dieser Zustand ein kleinster Werth oder ein Minimum.

§. 122.

Lehrsatz.

Für ein Maximum ist $\frac{dy}{\Delta x} = 0$, und $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ kann mit diesem Zustande nicht einstimmig seyn; für ein Minimum ist $\frac{dy}{\Delta x}$ gleichfalls $= 0$, und $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ kann mit jenem Zustande der Fluente nicht widerstreitend seyn.

1. Befindet sich die Fluente in einem größesten Zustande, oder im Maximum, so sollte sie in den vorhergehenden Zuständen wachsen, d. h. es mußte hier $\frac{dy}{\Delta x}$ mit den vorhergehenden Zuständen der Fluente einstimmig seyn. (§. 107.) Für die nachfolgenden Zustände, in welchen die Fluente wieder abnehmen sollte, mußte $\frac{dy}{\Delta x}$ mit diesen widerstreitend seyn (§. 107.); folglich, (da die vorhergehenden und nachfolgenden Zustände der Fluente mit einander einstimmig sind,) müssen die vorhergehenden und nachfolgenden Zustände von $\frac{dy}{\Delta x}$ einander widerstreitend, d. h. es muß $\frac{dy}{\Delta x}$ im Zustande selbst $= 0$ seyn (§. 101.). Da ferner das Bestreben der Fluente vor dem Zustande abnehmen mußte, indem es sonst nicht zu 0 kommen konnte, so war hier $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ mit $\frac{dy}{\Delta x}$, d. h. auch mit den vorhergehenden Zuständen der Fluente widerstreitend. Da nun ferner in den nachfolgenden Zuständen der Fluente $\frac{dy}{\Delta x}$, welches mit diesen Zuständen widerstreitend war, wieder zunahm, so muß $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ in diesen Zuständen mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig, also mit den nachfolgenden Zuständen der Fluente widerstreitend seyn. Es ist also $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ sowohl in den vorhergehenden als auch in den nachfolgenden Zuständen mit den

gleichzeitigen Zuständen der Fluente, also auch mit dem größesten Zustande selbst (§. 102.) widerstreitend, und kann daher in diesem Zustande wohl $= 0$, aber nicht mit ihm einstimmig seyn. (§. 102. am Ende.)

2. Befindet sich die Fluente in einem kleinsten Zustande, so nahm sie in den vorhergehenden Zuständen ab, so, daß also hier $\frac{dy}{\Delta x}$ mit diesen Zuständen widerstreitend ist, in den nachfolgenden aber nahm sie zu, so, daß also hier $\frac{dy}{\Delta x}$ mit diesen Zuständen einstimmig ist. Da nun nach §. 102. vorhergehende und nachfolgende Zustände einer Fluente, wenn sie sich in einem reellen Zustande befindet, einstimmig sind; so sind hier die vorhergehenden Zustände von $\frac{dy}{\Delta x}$ mit den nachfolgenden widerstreitend, also ist $\frac{dy}{\Delta x}$ im Zustande des Minimums selbst $= 0$. (§. 101.). Da ferner $\frac{dy}{\Delta x}$ vor dem Minimum abnehmen mußte, indem es sonst nicht zu 0 kommen konnte, so war hier $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ mit $\frac{dy}{\Delta x}$ widerstreitend, d. h. mit den vorhergehenden Zuständen der Fluente einstimmig, da hier $\frac{dy}{\Delta x}$ mit denselben selbst widerstreitend ist. Da ferner $\frac{dy}{\Delta x}$ in den nachfolgenden Zuständen wieder zunahm, so ist hier $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ mit $\frac{dy}{\Delta x}$, d. h. auch mit den nachfolgenden Zuständen der Fluente einstimmig, da $\frac{dy}{\Delta x}$ damit einstimmig war.

Es ist also $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ sowohl in den vorhergehenden, als nachfolgenden Zuständen mit den gleichzeitigen Zuständen der Fluente, also auch mit dem größesten Zustande selbst (§. 102.) einstimmig, und kann daher in diesem Zustande selbst wohl $= 0$, aber nicht mit ihm widerstreitend seyn. (§. 102. am Ende.)

Für ein Maximum ist daher $\frac{dy}{\Delta x} = 0$, und $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ entweder mit jenem Zustande widerstreitend, oder selbst $= 0$. Für ein Minimum ist $\frac{dy}{\Delta x} = 0$ und $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ ist entweder mit dem kleinsten Zustande selbst einstimmig, oder $= 0$.

Ist also außer dem ersten Differentialverhältnisse auch noch das zweite $= 0$, so sind beide Fälle möglich, und es kommt noch auf die folgenden Differentialverhältnisse an, welcher Fall eintritt.

1. Ist die Fluente in einem größesten Zustande, und soll dabei außer $\frac{dy}{\Delta x}$ auch noch $\frac{d^2y}{\Delta x^2} = 0$ seyn; so muß, da $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ sowohl in den vorhergehenden als nachfolgenden Zuständen mit dem größesten Zustande widerstreitend war, das erste der folgenden Differentialverhältnisse von $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$, welches für diesen Zustand wieder reell wird, von paarem Range, und zugleich mit $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ vor und nach dem Zustande einstimmig (§. 116.), d. h. mit dem größesten Zustande der Fluente widerstreitend seyn. Ein Differentialverhältniß von $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ von paarem Range ist aber auch ein Differentialverhältniß von y oder der Fluente von paarem Range.

2. Ist die Fluente im Zustande des Minimums, und soll außer $\frac{dy}{\Delta x}$ auch noch $\frac{d^2y}{\Delta x^2} = 0$ seyn; so muß, da $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ in den vorhergehenden und nachfolgenden Zuständen der Fluente mit jenem Zustande einstimmig war, dasjenige der nachfolgenden Differentialverhältnisse von $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$, welches zuerst für diesen Zustand wieder reell wird, von paarem Range, und zugleich mit den vorhergehenden und nachfolgenden Zuständen von $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ einstimmig (§. 116.), d. h. auch mit dem Zustande selbst einstimmig seyn. Aber ein Differentialverhältniß von $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ von paarem Range ist auch ein Differentialverhältniß der Fluente oder von y von paarem Range.

Allgemein muß also für einen Zustand dieser Art der Fluente jedesmal $\frac{dy}{\Delta x} = 0$, und dasjenige der folgenden Differentialverhältnisse, welches für diesen Zustand zuerst wieder reell wird, von paarem Range seyn. Ist dieses dann mit dem Zustande der Fluente einstimmig, so ist der Zustand ein Minimum, ist es hingegen mit demselben widerstreitend, ein Maximum.

Um also zu erkennen, für welchen Werth von x die Fluente ein Maximum oder Minimum sey, hat man nur nöthig das erste Differentialverhältniß aus der bekannten Function zu berechnen, es = o zu setzen, und aus dieser Gleichung den Werth von x zu ziehen, welcher derselben Genüge leistet, so ist dieser derjenige Werth, welcher zu jenem gesuchten Zustande der Fluente führt. Substituirt man diesen Werth in die folgenden Differentialverhältnisse, und wird dadurch verursacht, daß das erste derselben, welches reell wird, von paarem Range ist, und mit y einstimmig wird, so ist der gefundene Zustand ein Minimum, umgekehrt ein Maximum. Bewirkt aber der Werth von x, daß dasjenige der folgenden Differentialverhältnisse, welches für dasselbe wieder reell wird, von unpaarem Range ist, so findet für diesen Werth von x kein Maximum oder Minimum Statt.

Aus dem Lehrsatze folgt noch, daß eine Fluente, wenn sie einen größesten Werth erlangt hat, retardirend wachsend angekommen sey und accelerirend abnehmend weiter fließe; daß hingegen eine Fluente, welche sich im Zustande des Minimums befindet, retardirend abnehmend zu derselben gekommen sey und accelerirend wachsend weiter fließen werde.

§. 123.

Man kann den Lauf einer Fluente, welche fließend bis zu einem gewissen Zustande gekommen ist, wieder rückwärts betrachten, sich vorstellend, daß sie wieder für dieselben Werthe der Gelegenheit in dieselben Zustände wie vorher komme.

Z. B. Man habe eine Curve AMN fig. 2. bisher so betrachtet, daß A der Anfangspunct ist, und die Richtung der Abscissen nach Q hin genommen wird; man kann aber auch ihren Lauf wieder rückwärts betrachten, indem man z. B. Q zum Anfangspuncte, und die Richtung der Abscissen nach A hin nimmt.

Wenn eine Fluente, y, in einem gewissen Zustande A ist, und daselbst, wenn ihr die Gelegenheit Δx ertheilt wird, das Bestreben $\frac{dy}{\Delta x}$ besitzt; und man will nun ihren Lauf rückwärts betrachten; so kann dieses geschehen, wenn man ihr eine Gelegenheit zu fließen ertheilt, welche der ersten widerstreitend war, so, daß also, wenn die ursprüngliche Gelegenheit $= + \Delta x$ gewesen ist, diese $= - \Delta x$ wird. Hiedurch werden aber die successiven Differentialverhältnisse von unpaarem Range ihren früheren Werthen widerstreitend, während alle die von paarem Range ihr Zeichen behalten. Waren daher die successiven Differentialverhältnisse zuerst:

$$\frac{dy}{\Delta x}, \frac{d^2 y}{\Delta x^2} \ldots \frac{d^{2n} y}{\Delta x^{2n}}, \frac{d^{2n+1} y}{\Delta x^{2n+1}} \ldots$$

so sind sie jetzt: $-\frac{dy}{\Delta x}, \frac{d^2 y}{\Delta x^2}, \ldots \frac{d^{2n} y}{\Delta x^{2n}}, - \frac{d^{2n+1} y}{\Delta x^{2n+1}}$.

Hat also eine Fluente, wenn man ihren Lauf nach der ursprünglichen Richtung betrachtet, ein Bestreben zu wachsen, so hat sie, wie sich auch schon von selbst verstehet, in demselben Zustande, wenn man von da ihren Lauf nach der entgegengesetzten Richtung betrachten wollte, ein Bestreben abzunehmen, und umgekehrt, da das erste Differentialverhältniß in beiden Fällen widerstreitend wird. Das zweite Differentialverhältniß bleibt dem Zeichen nach ungeändert, war es also zuvor mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig, so wird es jetzt damit widerstreitend, und umgekehrt, d. h. geschah das Fließen nach der ursprünglichen Richtung mit Acceleration, so wird es jetzt mit Retardation geschehen müssen und umgekehrt.

Allgemein, wurden mehrere Differentialverhältnisse von dem ersten an $= 0$, und ist das 2nte das erste, welches wieder reell wird; so kam die Fluente wachsend an, und ging abnehmend weiter, wenn $\frac{d^{2n}y}{\Delta x^{2n}}$ mit y widerstreitend ist, sie gelangte aber abnehmend zu dem Zustande und ging wachsend weiter, wenn jenes 2nte Differentialverhältniß mit y oder dem Zustande der Fluente einstimmig war. (§. 122.) Nimmt man nun Δx negativ an, wodurch sich so wenig y, als $\frac{d^{2n} y}{\Delta x^{2n}}$ dem Zeichen nach verändert, so siehet man, daß dasselbe rückwärts der Fall ist, was früher auch vorwärts Statt fand.

Ist aber das $2n+1$te Differentialverhältniß dasjenige, welches zuerst wieder reell wird, so kam die Fluente wachsend an, und ging wachsend weiter, wenn $\frac{d^{2n+1}y}{\Delta x^{2n+1}}$ mit y, oder dem Zustande, in welchem man die Fluente betrachtet, einstimmig war; sie kam hingegen abnehmend zu jenem Zustande, und ging abnehmend weiter, wenn das $2n+1$te Differentialverhältniß mit y widerstreitend wurde. (§. 117.) Die Fluente y ändert nun aber ihr Zeichen nicht, wenn Δx mit entgegengesetztem Zeichen angenommen wird, wohl aber $\frac{d^{2n+1}y}{\Delta x^{2n+1}}$, und man siehet hieraus, daß hier grade das Umgekehrte Statt finden werde, wenn man den Lauf der Fluente rückwärts betrachten wollte, wie es übrigens auch schon aus der Natur der Sache selbst erhellet.

Wurden aber mehrere Differentialverhältnisse nach dem ersten $= 0$, und war das $2n$te das erste, welches wieder reell wurde, so, daß die Fluente, wenn $\frac{d^{2n}y}{\Delta x^{2n}}$ mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig war, mit Acceleration anlangte und mit Acceleration weiterging, im Fall das Fließen nach der ursprünglichen Richtung betrachtet wurde; so siehet man, da das $2n$te Differentialverhältniß das Zeichen nicht ändert, wenn Δx negativ angenommen wird, daß in diesem Falle $\frac{d^{2n}y}{\Delta x^{2n}}$ mit $\frac{dy}{\Delta x}$ widerstreitend wird, die Fluente also jetzt mit Retardation ankam und eben so fließend weiterging. War aber das $2n$te Differentialverhältniß mit dem ersten widerstreitend, so, daß also die Fluente mit Retardation ankam, und eben so fließend weiterging, so wird sie, wenn Δx jetzt negativ angenommen wird, mit Acceleration zu dem Zustande gekommen seyn, und mit Acceleration weiter fließen.

Ist aber das erste reell werdende Differentialverhältniß das $2n+1$te, so, daß also die Fluente, wenn dieses mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig war, mit Retardation ankam, und mit Acceleration weiterging (§. 120.); so wird sie, wenn Δx mit dem widerstreitenden Zeichen gedacht, also der Lauf der Fluente rückwärts betrachtet wird, ebenfalls mit Retardation angekommen seyn, und mit Acceleration weiter fließen, da das $2n+1$te Differentialverhältniß zugleich mit dem ersten das Zeichen ändert.

Eben dasselbe ist auch der Fall, wenn die Fluente accelerirend ankam und retardirend weiterging.

Zweiter Abschnitt.

Von Erforschung des Gesetzes der Fluenten aus den bekannten Eigenschaften derselben.

§. 124.

Die bisherigen Untersuchungen über die Fluenten betrafen ihre Eigenschaften, insofern sich diese aus dem bekannten Gesetze oder der Function ableiten ließen. Der zweite Abschnitt, welcher ganz das Umgekehrte des ersten ist, hat die Erforschung des Gesetzes einer Fluente oder ihre Function aus den bekannten Eigenschaften zum Gegenstande.

Schon oben bot sich Gelegenheit dar, das Gesetz einer fließenden Größe zu entdecken, nämlich das einer solchen Fluente, z, welche das Bestreben zu fließen einer anderen, aber bekannten Fluente, $y = \varphi(x)$ ausdrückte, und wir fanden dieses Gesetz allgemein in folgender Gleichung: $z = \frac{dy}{\Delta x}$.

Die Methode, welcher wir uns dabei bedienten, ist allgemein, und kehrt bei allen ähnlichen Untersuchungen wieder. Der Gang ist folgender:

1) Man erforsche eine solche Fluente der vorgeschriebenen Art, deren Gesetz schon bekannt ist, was in den meisten Fällen geschiehet, wenn man die gleichförmig fließende dieser Art aufsucht, worauf man ihr Bestreben zu fließen sogleich unmittelbar abnehmen kann.

2) Man stelle sich vor, daß die Fluente, für welche das Gesetz gefunden werden soll, mit jener bekannten in einem und demselben Zustande sey, in welchem beide ein gleiches Bestreben zu fließen haben mögen.

3) Man suche den Zusammenhang auf, in welchem beide Fluenten unter diesen Umständen mit einander stehen, welches jedesmal geschehen kann; so wird man, da das Bestreben der einen bekannt ist, und beide dasselbe in diesem Zustande gemein haben sollen, das der zu erforschenden Fluente dadurch gefunden haben.

4) Es werde jetzt das zu suchende Gesetz der Fluente y, welche von der Gelegenheit x abhängen mag, durch eine allgemeine Function: $y = \varphi(x)$ fingirt; da nun das Bestreben z dieser Fluente schon gefunden ist, so muß dieses dem ersten Differentialverhältniß aus der fingirten Gleichung gleich seyn, d. h. man hat:

$$z = \frac{dy}{\triangle x} \text{ also}$$

$$y = \int z \triangle x + \text{Const.}$$

welches die gesuchte Function, oder das Gesetz darbietet.

Beispiele von diesem allgemeinen Verfahren werden durch die nachfolgenden Untersuchungen hinlänglich gegeben werden.

§. 125.

Es giebt Fälle, wo durch die bekannte Eigenschaft einer Fluente, aus welcher man die Function finden will, das Bestreben unmittelbar gegeben wird.

Z. B. Es sey ein Capital, $= A$, dergestalt auf Zinseszinsen ausgeliehen, daß diese Zinsen nicht nach Intervallen, z. B. von einem Jahre, sondern ununterbrochen zum Capital geschlagen werden, so, daß also das wachsende Capital eine Fluente ist. Sey dieses übrigens zu a pro cent ausgeliehen, d. h. hier, möge der Zuwachs desselben in dem ersten Jahre $= \frac{a}{100} \cdot A$ seyn, wenn in dieser Zeit die Zinsen nicht mit zum Capital gerechnet würden; so ist klar, daß das Capital in jedem Zustande das Bestreben habe, um den $\frac{a}{100}$ten Theil seines Zustandes zu wachsen, d. h. hat man die Function für diese Fluente y, welche von der Zeit, t, als Gelegenheit, abhängt, folgendermaßen fingirt:

$$y = \varphi\,(t),$$

so ist:

$$\frac{dy}{\Delta t} = \frac{a}{100}.\,\varphi\,(t) = \frac{a}{100}\,y \text{ also}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{a}{100}\,\Delta t \text{ und}$$

$$\log.\,\text{nat.}\;y = \frac{a}{100}.\,t + \text{Const.}$$

Für $t = o$ ist $y = A$ also:

$$\text{Const.} = \log.\,\text{nat.}\;A. \text{ und daher:}$$

$$\log.\,\text{nat.}\;y - \log.\,\text{nat.}\;A = \frac{a}{100}t \text{ oder:}$$

$$y = A.\,e^{\frac{a}{100}.\,t.}$$

In diesem zweiten Abschnitte, welcher sich mit der Erforschung des Gesetzes der Fluenten beschäftigt, welches aus den bekannten Eigenschaften derselben geschiehet, müssen daher specielle Fälle der Fluenten betrachtet werden, und wir wählen dazu die wichtigsten, die Curven und die gesetzmäßigen Bewegungen, also die analytische Geometrie und die Mechanik.

Erstes Capitel.

Von den krummen Linien.

I. Von den Curven, auf parallele Ordinaten bezogen.

§. 126.

Die allgemeinste Gleichung für die gleichförmige Fluente ist:

$$y = a + bx.$$

Siehet man hier x als Abscisse, y als Ordinate an, so drückt diese Gleichung ausschließlich eine grade Linie aus, und folglich ist die grade Linie von allen anderen Linien allein diejenige, deren Ordinaten mit Gleichförmigkeit fließen.

Das constante Bestreben, womit die Ordinate der graden Linie fließt, ist

$$\frac{dy}{\Delta x} = b.$$

Um diese Größe räumlich zu construiren, so sey der Coordinatenwinkel MPR $= \psi$ und der Anfangspunct in A Fig. 4. Für $x = 0$ ist $y = a = AC$. Für $y = 0$ findet man aus der Gleichung den Werth von x, für welchen die grade Linie BM die Abscisse schneidet, und man hat alsdann x

$$= -\frac{a}{b} = -\frac{AC}{b}.$$

Dieses ist die Abscisse BA, und das negative Zeichen deutet nur an, daß dieses Abscissenstück nach der entgegengesetzten Seite liegt.

Man hat daher:

$$\frac{AC}{b} = BA \text{ oder } b = \frac{AC}{AB}.$$

Man fälle daher von C das Perpendikel Cq auf die Abscisse, so hat man:

$$\frac{Cq}{Bq} = \text{Tang}\, CBR = \text{Tang}\, \varphi.$$

Nun aber ist $Cq = AC.\ \text{Sin}\, \psi$

und $Bq = AB + AC.\ \text{Cos}\, \psi$

also $AC = \frac{Cq}{\text{Sin}\, \psi}$ und

$$AB = Bq - AC.\ \text{Cos}\, \psi$$

$$= Bq - \frac{Cq}{\text{Sin}\, \psi}.\ \text{Cos}\, \psi$$

also hat man

$$\frac{AC}{AB} = b = \frac{Cq}{\text{Sin}\, \psi \left(Bq - \frac{Cq.\ \text{Cos}\, \psi}{\text{Sin}\, \psi}\right)}$$

$$= \frac{Cq}{Bq.\ \text{Sin}\, \psi - Cq.\ \text{Cos}\, \psi}$$

$$= \frac{\text{Tang}\, \varphi}{\text{Sin}\, \psi - \text{Tang}\, \varphi\ \text{Cos}\, \psi}$$

Dieser Ausdruck ist also die Größe des Bestrebens, womit die Ordinate einer graden Linie fließt. Wir werden künftig dieses Bestreben das Ordinaten-Bestreben nennen. Setzt man $\psi = 90°$, d. h. ist der Coordinatenwinkel ein rechter, so ist $\text{Cos}\, \psi = 0$; $\text{Sin}\, \psi = 1$, folglich das Ordinaten=Bestreben $= b =$ Tang φ. Nimmt y, oder die Ordinate ab, wenn x zunimmt, so ist nach dem Vorhergehenden b, oder tang φ negativ, wie auch aus der Figur erhellet.

Hat man also die Gleichung:

$$y = a + bx$$

für eine grade Linie, wo b oder $\frac{\text{Tang } \varphi}{\text{Sin } \psi - \text{tang } \varphi \text{ Cos } \psi}$ der Ausdruck für das constante Bestreben ist, womit die Ordinate fließt, so ist, wenn der Winkel $\varphi = 0$ angenommen wird, d. h. jene zu betrachtende grade Linie mit der Abscisse parallel läuft, auch tang $\varphi = b = 0$, also die Gleichung für die grade Linie:

$$y = a.$$

Die Ordinate bleibt stets dieselbe (Fig. 5.), wenn die Abscisse fließt. Das Ordinaten=Bestreben kann auch in der That in einem solchen Falle keine reelle Größe haben, indem es sonst ein wirkliches Wachsen oder Abnehmen der Ordinate zur Folge haben würde, welches hier nicht Statt findet.

Nimmt man aber den Winkel $\varphi = \psi$ an, d. h. soll der Winkel, welchen die zu betrachtende grade Linie mit der Abscisse macht, dem Coordinatenwinkel gleich seyn (Fig. 6.), so wird b, oder das Ordinaten=Bestreben

$$= \frac{\text{Tang } \psi}{\text{Sin } \psi - \text{Tang } \psi \text{ Cos } \psi} = \frac{\text{Tang } \psi}{0}$$

d. h. es ist in einem unvergleichbaren Zustande, und da dieses Bestreben kein zweites Bestreben hat, welches diesen Zustand abändern könnte, d. h. da nichts die Ordinate hindert, ihrem Bestreben zu folgen, so wird sie auch sogleich unvergleichbare Werthe annehmen.

§. 127.

Die Ordinaten einer Curve können während sich die Abscisse ändert, sowohl wirklich wachsen, als auch abnehmen; im ersten Falle ist ihr Bestreben zu fließen, oder $\frac{dy}{\Delta x}$ mit der Ordinate einstimmig, im andern Falle widerstreitend. (§. 107).

Z. B. Die Gleichung der Ellipse (Fig. 3.) ist:

$$y = \mp \sqrt{(bx - \frac{b}{a} x^2)}$$

wo der Anfangspunct der Abscissen in A, die große Axe als Abscissenrichtung angenommen, und der Coordinatenwinkel ein rechter ist. Für jeden Werth von x, der zu reellen Ordinaten führt, gehören zwei gleiche aber entgegengesetzte Ordinaten, so, daß also, wenn die Ordinate PM über der Abscisse AR positiv, also die Ordinaten Pm unter derselben negativ angenommen werden, wie man es zu thun gewohnt ist, die Gleichung:

$$y = \sqrt{(bx - \frac{b}{a}x^2)}$$

das Gesetz für die positiven Ordinaten, hingegen:

$$y = -\sqrt{(bx - \frac{b}{a}x^2)}$$

das für die negativen ausdrückt.

Das Differentialverhältniß für die erste Gleichung ist:

$$\frac{dy}{\Delta x} = \frac{1}{2}(bx - \frac{b}{a}x^2)^{-\frac{1}{2}} (b - \frac{2b}{a}x) = \frac{b - \frac{2b}{a}x}{2\sqrt{(bx - \frac{b}{a}x^2)}}$$

das für die zweite:

$$\frac{dy}{\Delta x} = -\frac{b - \frac{2b}{a}x}{2\sqrt{(bx - \frac{b}{a}x^2)}}$$

So lange nun x kleiner ist, als $\frac{1}{2}a$, oder die halbe große Axe, so lange ist $\frac{b - \frac{2b}{a}x}{2\sqrt{(bx - \frac{b}{a}x^2)}}$ positiv, also, da auch y hier positiv ist, mit der Ordinate einstimmig, so lange wächst also die Ordinate. Ist hingegen x größer, als $\frac{1}{2}a$, so wird jener Ausdruck negativ, also mit y widerstreitend, daher nimmt die Ordinate hier ab. Untersucht man den negativen Theil, so ist $-\frac{b - \frac{2b}{a}x}{2\sqrt{(bx - \frac{b}{a}x^2)}}$ so lange negativ, so lange x kleiner ist, als $\frac{1}{2}a$, also, da y hier negativ ist, mit der Ordinate einstimmig, so lange wachsen daher die Ordinaten; ist hingegen x größer, als $\frac{1}{2}a$, so wird der Ausdruck positiv, daher widerstreitend mit y, und die Ordinaten nehmen also hier wieder ab.

Dasselbe findet beim Kreise Statt, wenn man den Anfangspunct im Umkreise annimmt. Die Gleichung der Parabel ist:

$$y = \mp \sqrt{bx}$$

wenn der Anfangspunct in den Scheitel A gesetzt, und die Axe als Abscissenrichtung angenommen wird. Nur für solche Werthe von x giebt es Ordinaten, welche dem Zeichen nach, mit b, dem Paramater, einstimmig sind, Nun ist für den positiven Schenkel der Parabel: $y = \sqrt{bx}$ und $\frac{dy}{\Delta x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{x}}$, für den negativen Schenkel ist: $y = -\sqrt{bx}$, und $\frac{dy}{\Delta x} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{x}}$.

Wenn nun x wächst, indem es immer mit b, wie es gefodert wird, einerlei Zeichen hat, so kann $\frac{dy}{\Delta x}$ nie mit y widerstreitend werden, mögen die Ordinaten positiv, oder negativ angenommen werden; d. h. die Ordinaten wachsen also stets, wenn x wächst. Dasselbe findet auch bei der Hyperbel Statt.

Von den Tangenten, der Concavität und Convexität, den Wendungspuncten und den größesten und kleinsten Ordinaten der Curven.

§. 128.

Eine grade Linie, BN, (Fig. 7.) welche einen Punct M mit einer Curve DME oder FMG gemein hat, so, daß das Ordinaten-Bestreben der Curve DME oder FMG in M eben so groß ist, als das der graden Linie BN, heißt eine Berührende oder Tangente für den Punct M der Curve DME oder FMG, welcher Punct der Berührungspunct genannt wird.

§. 129.

Soll die grade Linie BN die Curve FMG oder DME in M berühren, oder soll das Ordinaten-Bestreben der einen oder der anderen Curve in M dem der graden Linie BN, welches $= b$ ist, wenn man dafür die Gleichung $y = a + bx$ hat, gleich seyn; so findet man:

$$b = \frac{\text{Tang}\,\varphi}{\text{Sin}\,\psi - \text{Tang}\,\varphi\,\text{Cos}\,\psi} = \frac{dy}{\Delta x}$$

folglich:

$$\text{Tang}\,\varphi = \frac{dy}{\Delta x}.\,\text{Sin}\,\psi - \frac{dy}{\Delta x}\,\text{Tang}\,\varphi\,\text{Cos}\,\psi$$

$$\text{Tang}\,\varphi\,\left(1 + \frac{dy}{\Delta x}\,\text{Cos}\,\psi\right) = \frac{dy}{\Delta x}\,\text{Sin}\,\psi$$

$$\text{Tang}\,\varphi = \frac{\frac{dy}{\Delta x}\,\text{Sin}\,\psi}{1 + \frac{dy}{\Delta x}\,\text{Cos}\,\psi}$$

oder, wenn der Coordinatenwinkel ein rechter ist, hat man

$$\text{Tang}\,\varphi = \frac{dy}{\Delta x}.$$

Bei irgend einer Curve ist also das Ordinaten-Bestreben durch den Ausdruck:

$$\frac{\text{Tang}\,\varphi}{\text{Sin}\,\psi - \text{Tang}\,\varphi\,\text{Cos}\,\psi}$$

gegeben, wo φ den Winkel bedeutet, welchen die Berührende für jenen Zustand mit der Abscisse macht. Ist der Coordinatenwinkel ein rechter, so ist das Ordinaten-Bestreben $= \text{Tang}\,\varphi$, gleich der Tangente des Winkels, welchen die Berührende mit der Abscisse formirt.

Umgekehrt, um an einen Punct einer Curve eine Berührende zu ziehen, hat man nur nöthig, das erste Differentialverhältniß für diesen Zustand zu berechnen, und den Ausdruck

$$\frac{\text{Sin}\,\psi\,\frac{dy}{\Delta x}}{1 + \text{Cos}\,\psi\,\frac{dy}{\Delta x}}$$

als Tangente anzusehen, so wird der dazu gehörige Winkel der seyn, welchen die zu ziehende Berührende in jenem Puncte mit der Abscisse macht.

§. 130.

Wenn die Ordinate der Curve DME (Fig. 7.) von M an, wo sie mit der der graden Linie gleiches Bestreben hatte, mit Acceleration wächst; so wird sie überall, so wie sie aus dem Zustande PM heraustritt, in größeren Zuständen verweilen, als die der graden Linie, so lange nemlich ihr Wachsen accelerirend bleibt, (§. 110. am Ende) d. h. die Curve wird überall nach dem Zustande PM über der graden Linie BN liegen. Wenn aber die Ordinate der Curve von M aus, wo sie gleiches Bestreben zu wachsen mit der graden Linie hat, mit Retardation zunimmt, so wird sie, so wie sie den Zustand PM verläßt, sogleich und immerwährend, so lange nemlich das retardirende Wachsen dauert, in kleineren Zuständen fließen, als die Ordinate der graden Linie, (§. 111. am Ende) d. h. die Curve wird überall von M aus unter der graden Linie liegen. Ist die Ordinate accelerirend wachsend bis zu dem Zustande PM gekommen, wo sie mit der Ordinate der graden Linie ein gleiches Bestreben zu wachsen erhalten hat; so wird sie vor diesem Zustande überall in größeren Zuständen gewesen seyn, als gleichzeitig die der graden Linie, (§. 112. am Ende), d. h. die Curve liegt überall über der graden Linie. Ist hingegen die Ordinate der Curve retardirend zu jenem Zustande PM gelangt, so befand sie sich überall vor demselben in kleineren Zuständen, als gleichzeitig die Ordinate der Graden (§. 113. am Ende) d. h. die Curve liegt überall vor dem Zustande PM unter der graden Linie.

Die accelerirend wachsende DME liegt also überall vor und nach dem Zustande PM der Ordinate über der Berührenden, und beide haben nur den Punct M mit einander gemein.

Die retardirend wachsende liegt überall vor und nach dem Zustande PM der Ordinate unter der Berührenden, oder zwischen dieser und der Abscisse, und beide haben nur den Punct M mit einander gemein.

Wenn die Curven abnehmend betrachtet worden, so folgt das Entgegengesetzte, wie aus den Lehrsätzen §. 110 bis §. 113. bewiesen wird.

§. 131.

Lehrsatz.

Es ist nicht möglich, von dem Berührungs-

puncte eine grade Linie zu ziehen, welche ganz zwischen der Curve und der Berührenden liegt.

Denn wenn erstlich die Ordinate der Curve DE (Fig. 8.) von M, oder dem Berührungspuncte, an mit Acceleration wächst, so, daß die Curve überall von M aus über der Berührungslinie MN liegt, (§. 130.) und man will von M eine andere grade Linie MG ziehen, welche zwischen MN und ME fällt, so muß das constante Ordinaten-Bestreben von MG größer seyn, als das von MN, d. h. größer, als das Ordinaten-Bestreben der Curve in M. Da nun das Ordinaten-Bestreben der accelerirenden Curve wächst, so kann dieses nach Verfluß einer gewissen Gelegenheit dem der graden Linie MG gleichkommen; während dieser Gelegenheit hat also MG ein größeres Ordinaten-Bestreben gehabt, als gleichzeitig die Curve, ist also während derselben stets in größeren Zuständen gewesen, als gleichzeitig die Cnrve, (§. 108.) d. h. sie lag während dieser Gelegenheit stets auch über der Curve. Sey nun auch der Unterschied des Ordinaten-Bestrebens von MG und des von MN noch so gering, reell muß er immer bleiben, wenn MG wirklich über MN liegen soll, so wird doch für eine angebliche Gelegenheit, d. h. für ein reelles Abscissenstück Pp die Curve zwischen MG und MN liegen, und der Fall, daß MG zwischen der Berührenden MN und der Curve liege, ist schlechterdings nicht möglich.

Betrachtet man den Lauf der Curve von M aus rückwärts, so wird sie, da sie früher mit Acceleration zunahm, jetzt mit Retardation abnehmen müssen. (§. 123.) Soll nun zwischen der Curve MD und der Berührenden MB noch eine grade Linie MF möglich seyn, welche also von M an über der Berührenden liegt, daher ein geringeres Bestreben abzunehmen haben muß, als diese, d. h. ein geringeres Ordinaten-Bestreben, als die Curve in M; so ist klar, da das Bestreben der Curve immer mehr und mehr abnimmt, weil sie mit Retardation fließt, daß dieselbe nach Verlauf irgend einer Gelegenheit ein eben so geringes Ordinaten-Bestreben erlangt haben kann, als MF. Während dieser Gelegenheit war also das Bestreben der Curve, womit sie abnahm, immer größer, als das gleichzeitige der graden Linie MF, und folglich ist sie während derselben stets in kleineren Zuständen gewesen als gleichzeitig die grade (§. 108.), d. h. sie lag während dieser Gelegenheit stets unter der graden Linie. Wenn also eine grade Linie von M aus gezogen werden soll, welche über der Berührenden MB liegt, so liegt diese anfänglich und für eine gewisse Gelegenheit oder Abscisse Pq auch über der Curve, mag der Unterschied des Ordinaten-Bestrebens von MB und MF, d. h. der Winkel FMB noch so gering seyn. Ist daher MB die Berührende, so ist eine grade Linie, zwischen MB und der Curve nicht möglich.

Dieses wird, wenn die Ordinaten der Curve mit Retardation wachsen oder mit Acceleration abnehmen, auf dieselbe Art bewiesen.

§. 132.

Wenn man die Berührende so weit verlängert, bis sie die Abscissenrichtung schneidet, so heißt das Stück der Abscisse von diesem Durchschnittspuncte bis zur Ordinate, also das Stück BP (Fig. 7.) die Subtangente, und BM die Tangente. Errichtet man im Berührungspuncte auf der Tangente ein Perpendikel, so heißt dasselbe, wenn es bis zur Abscisse verlängert wird, also MQ, die Normale und das Stück der Abscisse von dem Durchschnitte der Normale bis zur Ordinate, die Subnormale.

§. 133.

Ist MH, (Fig. 7.) senkrecht auf der Abscisse, so ist:

$$MH = PM \operatorname{Sin} \psi = y \operatorname{Sin} \psi.$$

Eben so: $MH = BH . \operatorname{Tang} \varphi$

also: $BH = y \frac{\operatorname{Sin} \psi}{\operatorname{Tang} \varphi}$.

Nun ist:

$$BP = BH - PH$$

und $PH = PM \operatorname{Cos} \psi = y \operatorname{Cos} \psi$

also: $BP = y \frac{\operatorname{Sin} \psi}{\operatorname{Tang} \varphi} - y \operatorname{Cos} \psi$.

Setzt man für Tang φ ihren Werth, so hat man:

$$BP = y\,(\operatorname{Sin}\psi \frac{1 + \operatorname{Cos}\psi \frac{dy}{\Delta x}}{\operatorname{Sin}\psi \frac{dy}{\Delta x}} - \operatorname{Cos}\psi)$$

$$= y\,\frac{\Delta x}{dy}.$$

Dieser Ausdruck für die Subtangente ist also für jeden Coordinatenwinkel derselbe, da ψ nicht mehr darin vorkömmt.

Um die Subnormale zu finden, bemerke man, daß man habe:

$$HQ = MH \operatorname{Tang} HMQ = MH \operatorname{Tang}\varphi$$
$$= y \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Tang}\varphi$$

folglich die Subnormale, oder

$$PQ = y \operatorname{Cos}\psi + y \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Tang}\varphi.$$

Wird nun für Tang φ der oben gefundene Werth gesetzt, so hat man:

$$PQ = y\,(\operatorname{Cos}\psi + \frac{(\operatorname{Sin}\psi)^2 \frac{dy}{\Delta x}}{1 + \operatorname{Cos}\psi \frac{dy}{\Delta x}})$$

$$= y\,(\frac{\operatorname{Cos}\psi + (\operatorname{Cos}\psi)^2 \frac{dy}{\Delta x} + (\operatorname{Sin}\psi)^2 \frac{dy}{\Delta x}}{1 + \operatorname{Cos}\psi \frac{dy}{\Delta x}})$$

$$= y\,(\frac{\operatorname{Cos}\psi + \frac{dy}{\Delta x}}{1 + \operatorname{Cos}\psi \frac{dy}{\Delta x}})$$

Ist der Coordinatenwinkel ein rechter, so ist $\operatorname{Cos}\psi = 0$ also die Subnormale

$$= y\,\frac{dy}{\Delta x}$$

Da ferner $\frac{BM}{BH} = \operatorname{Sec}\varphi = \sqrt{(1 + (\operatorname{Tang}\varphi)^2)}$ so ist die Tangente oder:

$$BM = BH \sqrt{(1 + (\operatorname{Tang}\varphi)^2)}$$
$$= \frac{y \operatorname{Sin}\psi}{\operatorname{Tang}\varphi} \sqrt{(1 + (\operatorname{Tang}\varphi)^2)}$$

$$= y \operatorname{Sin} \psi \sqrt{(1 + \frac{1}{(\operatorname{Tang} \varphi)^2})}$$

$$= y \operatorname{Sin} \psi \sqrt{(1 + \frac{(1 + \operatorname{Cos} \psi \frac{dy}{\Delta x})^2}{(\frac{dy}{\Delta x})^2 (\operatorname{Sin} \psi)^2})}$$

$$= y \frac{\Delta x}{dy} \sqrt{((\frac{dy}{\Delta x}) (\operatorname{Sin} \varphi)^2 + 1 + 2 \operatorname{Cos} \psi \frac{dy}{\Delta x} + (\operatorname{Cos} \psi)^2 (\frac{dy}{\Delta x})^2)}$$

$$= y \frac{\Delta x}{dy} \sqrt{(1 + 2 \frac{dy}{\Delta x} \operatorname{Cos} \psi + \frac{dy^2}{\Delta x^2})}$$

Ist der Coordinatenwinkel ein rechter, so hat man die Tangente:

$$= y \frac{\Delta x}{dy} \sqrt{(1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2})} = y \sqrt{(1 + \frac{\Delta x^2}{dy^2})}$$

Um endlich die Normale zu finden, setze man:

$$\frac{MQ}{MH} = \operatorname{Sec} \varphi = \sqrt{(1 + (\operatorname{Tang} \varphi)^2)}$$

also ist die Normale, oder MQ:

$$= MH \sqrt{(1 + (\operatorname{Tang} \varphi)^2)}$$

$$= y \operatorname{Sin} \psi \sqrt{(1 + \frac{(\operatorname{Sin} \psi)^2 \frac{dy^2}{\Delta x^2}}{(1 + \operatorname{Cos} \psi \frac{dy}{\Delta x})^2})}$$

$$= \frac{y \operatorname{Sin} \psi}{1 + \operatorname{Cos} \psi \frac{dy}{\Delta x}} \sqrt{(1 + 2 \operatorname{Cos} \psi \frac{dy}{\Delta x} + \frac{dy^2}{\Delta x^2})}$$

Ist der Coordinatenwinkel ein rechter, also $\operatorname{Cos} \psi = 0$, $\operatorname{Sin} \psi = 1$, so ist die Normale

$$= y \sqrt{(1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2})}$$

§. 134.

Ist AP die Axe der Parabel, (Fig. 9.) $AP = x$, $PM = y$, so hat man: $y = \sqrt{bx}$, also $\frac{dy}{\Delta x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{x}}$ und $\frac{\Delta x}{dy} = 2 \sqrt{\frac{x}{b}}$. Folglich die Subtangente,

$$= y \frac{\Delta x}{dy} = 2 y \sqrt{\frac{x}{b}} = 2 \sqrt{bx} . \sqrt{\frac{x}{b}} = 2 x.$$

Die Subnormale ist:

$$= y \frac{dy}{\Delta x} = \tfrac{1}{2} \sqrt{bx} . \sqrt{\frac{b}{x}} = \tfrac{1}{2} b$$

also constant, und dem halben Parameter gleich.

Um also an eine Parabel eine Tangente zu ziehen, verlängere man die Abscisse nach der entgegengesetzten Richtung, schneide auf derselben ein Stück Ap ab, welches eben so groß ist, wie die Abscisse x, und ziehe durch M und p eine grade Linie, so ist diese die Tangente für die Abscisse x. Oder man trage vom Endpuncte P die Abscisse x, welche zu dem Puncte M gehört, den halben Parameter, $\frac{b}{2} = PS$, ziehe SM, und errichte auf MS im Puncte M ein Perpendikel PM, so ist dieses die gefoderte Tangente.

§. 135.

Man hat für die Ellipse, wenn man den Anfangspunct in A (Fig. 10.) die große Axe als Abscissenrichtung und die Ordinaten rechtwinkelig annimmt, die Gleichung:

$$y = \sqrt{(bx - \frac{b}{a} x^2)}$$

wo b den Parameter, a die große Axe ausdrückt. Für die Hyperbel hat man, wenn A (Fig. 11.) der Anfangspunct und die große Axe als Abscisse angenommen wird, die Gleichung:

$$y = \sqrt{(bx + \frac{b}{a} x^2)}$$

Nun ist für die Ellipse

$$\frac{dy}{\Delta x} = \frac{b - 2\frac{b}{a} x}{2\sqrt{(bx - \frac{b}{a} x^2)}} = \frac{b(a - 2x)}{2a\sqrt{(bx - \frac{b}{a} x^2)}}$$

folglich:

$$\frac{\Delta x}{dy} = \frac{2a\sqrt{(bx - \frac{b}{a} x^2)}}{b(a - 2x)}$$

also die Subtangente:

$$= \frac{2a\left(bx - \frac{b}{a}x^2\right)}{b(a-2x)} = \frac{2x(a-x)}{a-2x}$$

Die Subnormale:

$$= \frac{b(a-2x)}{2a} = \tfrac{1}{2}b - \frac{x}{a}$$

Für die Hyperbel ist:

$$\frac{dy}{\Delta x} = \frac{b + 2\frac{b}{a}x}{2\sqrt{\left(bx + \frac{b}{a}x^2\right)}} = \frac{b(a+2x)}{2a\sqrt{\left(bx + \frac{b}{a}x^2\right)}}$$

also

$$\frac{\Delta x}{dy} = \frac{2a\sqrt{\left(bx + \frac{b}{a}x^2\right)}}{b(a+2x)}$$

also die Subtangente:

$$= \frac{2a\left(bx + \frac{b}{a}x^2\right)}{b(a+2x)} = \frac{2x(a+x)}{a+2x}$$

die Subnormale:

$$= \frac{b(a+2x)}{2a} = \frac{b}{2} + \frac{x}{a}$$

Betrachtet man die Coordinaten der Ellipse aus dem Mittelpuncte der großen Axe und nennt a die halbe große, c die halbe kleine Axe, so hat man die Gleichung:

$$y = \frac{c}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

Differentiirt man diese Gleichung, so erhält man:

$$\frac{dy}{\Delta x} = -\frac{cx}{a\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

und

$$\frac{\Delta x}{dy} = -\frac{a\sqrt{(a^2-x^2)}}{cx}$$

folglich die Subtangente:

$$= -\frac{a^2-x^2}{x}$$

die Subnormale:

$$= -\frac{c^2 x}{a^2}$$

Ist $c = a$, so gehet die Gleichung in die eines Kreises mit dem Halbmesser $= a$ über, dann ist die Subtangente:

$$= \frac{a^2 - x^2}{x}$$

die Subnormale $= - x$, so, daß alle Normalen durch den Mittelpunct gehen müssen, wie auch aus den Elementen bekannt ist.

§. 136.

Die Gleichung für die logarithmische Linie ist:

$$y = e^x.$$

Man hat daher:

$$\frac{dy}{\Delta x} = e^x \text{ und}$$

$$\frac{\Delta x}{dy} = \frac{1}{e^x} \text{ folglich:}$$

die Subtangente $= \frac{e^x}{e^x} = 1,$

die Subnormale $= e^{2x} = y^2.$

Die Gleichung für die Cissoide ist:

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{a - x}}$$

wobei a den Diameter des erzeugenden Kreises bedeutet. Man hat daher:

$$\frac{dy}{\Delta x} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{a-x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{3(a-x)x^2 + x^3}{(a-x)^2}\right)$$

$$= \frac{3x^2(a-x) + x^3}{2(a-x)^2\sqrt{\left(\frac{x^3}{a-x}\right)}} = \frac{3ax^2 - 2x^3}{2(a-x)^2\sqrt{\left(\frac{x^3}{a-x}\right)}}$$

folglich ist die Subtangente

$$= \frac{2(a-x)x^3}{3ax^2 - 2x^3} = \frac{2(ax - x^2)}{3a - 2x}$$

die Subnormale findet man also

$$= \frac{3ax^2 - 2x^3}{2(a-x)^2}.$$

§. 137.

Findet man das Differentialverhältniß aus der Gleichung für eine Curve gezogen für einen bestimmten Werth von x, $= \frac{a}{o}$, so ist, da:

$$\frac{dy}{\Delta x} = \frac{\text{Tang}\,\varphi}{\text{Sin}\,\psi - \text{Tang}\,\varphi.\ \text{Cos}\,\psi}$$

gefunden ist,

$$\text{Sin}\,\psi - \text{Tang}\,\varphi\ \text{Cos}\,\psi = o \text{ also } \psi = \varphi$$

d. h. also der Winkel, welchen die Berührende mit der Abscisse macht, ist dem Coordinatenwinkel gleich, oder die Berührende ist parallel mit der Ordinate. Für senkrechte Coordinaten stehet also in einem solchen Falle die Tangente rechtwinkelig auf der Abscisse. Findet man aber das erste Differentialverhältniß für irgend einen Werth von x, $= o$, so ist Tang $\varphi = o$, also auch $\varphi = o$, d. h. die Berührende läuft mit der Abscisse parallel. Im ersten Falle ist das Ordinaten-Bestreben in einem unvergleichbaren Zustande, und die Ordinate würde hier, falls das zweite Bestreben das erste nicht abänderte, oder wenn sie ihrem Bestreben hier unabänderlich folgen würde, sogleich in einen unbegrenzten Zustand übergehen, wie es mit der Berührenden in jenem Puncte, welche jenes Bestreben wirklich beibehält, in der That der Fall ist.

Z. B. das Bestreben, womit die Ordinate der Parabel für die Abscisse x wächst, ist $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{x}}$. Für $x = o$, oder im Scheitelpuncte ist dieses Bestreben $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{o}}$, die Berührende AB (Fig. 9.) stehet hier also senkrecht auf der Abscisse, und das Bestreben ist in einem unvergleichbaren Zustande. Die Ordinate ist in dem Anfangspuncte bestrebt, sogleich unvergleichbare Werthe anzunehmen, und dieses würde geschehen, wenn ihr Bestreben nicht sogleich abgeändert würde. Die berührende AB behält dieses Bestreben bei, und deswegen sind auch ihrer Ordinaten in der That alle in einem unvergleichbaren Zustande, keine wird sie je erreichen.

Je größer x wird, desto kleiner wird das Ordinaten-Bestreben der Parabel oder $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{x}}$, es kann so klein werden, als man es sich nur vorstellen kann, obgleich es nie den Nullzustand selbst erreicht. Dieses Bestreben durchläuft also jede gedenkbare Größe, man kann daher die Frage aufwerfen, wo dieses Bestreben = 1 ist, d. h. für welche Abscisse die Größe des Ordinaten-Bestrebens der Einheit gleich ist.

In der That, setzt man $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{x}} = 1$, so folgt $x = \frac{1}{4}b$. Die Ordinate, welche im Brennpuncte stehet, hat also ein solches Bestreben, wie die Abscisse, da dieses als das Bestreben der Gelegenheit = 1 ist. Der Winkel, welchen die Berührende für diesen Zustand mit der Abscisse macht, ist = 45°.

Für die Ellipse ist $\frac{dy}{\Delta x} = \frac{b\,(a - 2x)}{2a\sqrt{(bx - \frac{b}{a}x^2)}}$, welches für $x = 0$ und $x = a$ unvergleichbar wird. Die Berührende an den beiden Scheitelpuncten stehet also auf der Abscisse senkrecht. Für $x = \frac{1}{2}a$ ist $\frac{dy}{\Delta x} = 0$, die Berührende läuft also mit der Abscisse parallel.

§. 138.

Die Gleichung für eine Curve ist gegeben, man soll an dieselbe eine Tangente ziehen, welche mit einer gegebenen graden Linie parallel ist, d. h. den Werth der Abscisse angeben, welche zu einem Puncte der Curve führt, wo die Tangente mit der gegebenen graden Linie gleichlaufend ist.

Den Winkel, welchen die gegebene grade Linie mit der Abscisse macht, ist bekannt, er sey $= \varphi$, folglich hat man, wenn der Coordinatenwinkel $= \psi$ ist:

$$\text{Tang}\,\varphi = \frac{\text{Sin}\,\psi\,\frac{dy}{\Delta x}}{1 + \text{Cos}\,\psi\,\frac{dy}{\Delta x}}$$

und für rechtwinkelige Ordinaten:

$$\text{Tang}\,\varphi = \frac{dy}{\Delta x}$$

woraus man in beiden Fällen, da $\text{Tang}\,\varphi$ bekannt vorausgesetzt wird, den Werth von x berechnen kann.

Z. B. Die gegebene Curve sey eine gemeine Parabel, $y = \sqrt{bx}$, $\frac{dy}{\Delta x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{x}} = \text{Tang}\,\varphi$, daher: $\frac{b}{4x} = (\text{Tang}\,\varphi)^2$, und $x = \frac{b}{4\,(\text{Tang}\,\varphi)^2}$. Ist also $\varphi = 45^\circ$, so ist $x = \frac{b}{4}$, also die gesuchte Ordinate stehet im Brennpuncte.

Ist die gegebene Curve eine Ellipse, so hat man, wenn die Ordinaten aus dem Mittelpuncte der großen Axe betrachtet werden:

$$y = \frac{c}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

folglich $\frac{dy}{\Delta x} = -\frac{cx}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \text{Tang}\,\varphi$

$$c^2x^2 = (\text{Tang}\,\varphi)^2 a^2 (a^2 - x^2) = a^4 (\text{Tang}\,\varphi)^2 - a^2 x^2 (\text{Tang}\,\varphi)^2$$

$$x^2 (c^2 + a^2 (\text{Tang}\,\varphi)^2) = a^4 (\text{Tang}\,\varphi)^2$$

$$x = \mp\sqrt{\left(\frac{a^4 (\text{Tang}\,\varphi)^2}{c^2 + a^2 (\text{Tang}\,\varphi)^2}\right)} = \mp\frac{a^2\,\text{Tang}\,\varphi}{\sqrt{(c^2 + a^2 (\text{Tang}\,\varphi)^2)}}$$

$$= \mp\frac{a\,\text{Tang}\,\varphi}{\sqrt{\left(\frac{c^2}{a^2} + (\text{Tang}\,\varphi)^2\right)}}$$

Die Ambiguität zeigt, daß man die Aufgabe immer auf doppelte Art lösen könne.

Für $c = a = r$ gehet die Gleichung der Ellipse in die eines Kreises über, dessen Radius $= r$ ist. Hier findet man also $x = \mp\frac{r\,\text{Tang}\,\varphi}{\sqrt{(1 + (\text{Tang}\,\varphi)^2)}} = \mp\frac{r\,\text{Tang}\,\varphi}{\text{Sec.}\,\varphi}$

$$= \mp\, r\,\text{Tang}\,\varphi.\,\text{Cos}\,\varphi = \mp\, r\,\text{Sin}\,\varphi.$$

§. 139.

Es sey ein Punct in der Ebene einer bekannten Curve gegeben, es wird verlangt, durch den Punct eine Tangente an die Curve zu ziehen.

Wenn A (Fig. 12.) der Anfangspunct der Abscissen ist, so sind die Coordinaten des gegebenen Puncts C als bekannt anzunehmen. Es sey $AB = k$, $BC = h$, M der Punct, wo die Tangente die Curve berührt; so ist, wenn man MG mit der Abscisse parallel ziehet, $CG = h - y$, $MG = k - x$, und daher Tang CMG $= \frac{dy}{\Delta x} = \frac{h-y}{k-x}$, aus welcher Gleichung man den Werth von x, welcher zu dem Berührungspuncte führt, finden kann.

Z. B. Die Curve sey eine Parabel, deren Anfangspunct im Scheitel angenommen ist, so findet man

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{x}} = \frac{h-\sqrt{bx}}{k-x}$$

$$\tfrac{1}{2}k\sqrt{\frac{b}{x}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{bx} = h - \sqrt{bx}$$

$$\tfrac{1}{2}k\sqrt{\frac{b}{x}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{bx} - h = 0$$

$$\tfrac{1}{2}x.\sqrt{b} - h\sqrt{x} + \tfrac{1}{2}k\sqrt{b} = 0$$

$$x - \frac{2h}{\sqrt{b}}.\sqrt{x} + k = 0$$

$$\sqrt{x} = \frac{h}{\sqrt{b}} \mp \sqrt{\left(\frac{h^2}{b} - k\right)}.$$

Die Auflösung dieser Aufgabe ist unmöglich, wenn $k > \frac{h^2}{b}$ oder $bk > h^2$ oder $h < \sqrt{bk}$. Nun ist aber $\sqrt{bk}$ die Ordinate der Parabel für die Abscisse k, d. h. = BH, woraus klar ist, daß h oder BG nicht kleiner seyn darf, als BH, d. h. nicht in die Parabel selbst fallen darf.

§. 140.

Da man aus der Gleichung für eine Curve die Ausdrücke für die Subtangente, Subnormale 2c. ableiten kann, so muß man auch umgekehrt aus diesen Ausdrücken, wenn sie bekannt sind, die Gleichung der Curve darstellen können.

Z. B. Es sey die Curve zu finden, deren Subtangente constant, = a, ist.

Da der allgemeine Ausdruck für die Subtangente $y\frac{\Delta x}{dy}$ ist, so hat man hier

$$y\frac{\Delta x}{dy} = a \text{ also}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{\Delta x}{a},$$

und wenn man auf beiden Seiten integrirt:

$$\text{Log. nat. } y = \frac{x}{a}$$

oder $y = e^{\frac{1}{a}x}$

Die Curve ist daher die logarithmische Linie.

Soll man ferner die Curve finden, deren Subnormale constant $= a$ ist, so hat man die Gleichung:

$$y\frac{dy}{\Delta x} = a,\; y\,dy = a\,\Delta x$$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = ax, \text{ und daher}$$

$$y = \sqrt{2ax},$$

d. h. die Curve ist eine Parabel, deren Parameter $= 2a$ ist.

Soll die Gleichung der Curve gefunden werden, deren Normale constant, $= a$, ist, so hat man:

$$y\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2}\right)} = a$$

$$y^2\left(1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2}\right) = a^2$$

$$\frac{dy^2}{\Delta x^2} = \frac{a^2}{y^2} - 1$$

$$dy = \sqrt{\left(\frac{a^2}{y^2} - 1\right)}\,\Delta x$$

umgekehrt also:

$$\Delta x = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{y^2} - 1\right)}} = \frac{y\,dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$$

$$x = \int\frac{y\,dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} = -\sqrt{(a^2 - y^2)}$$

oder:

$$y = \sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

Die Curve ist also ein Kreis mit dem Halbmesser $= a$.

Soll man die Curve finden, deren Subtangente immer so groß, wie ihre Subnormale ist, so hat man $y\frac{dy}{\Delta x} = y\frac{\Delta x}{dy}$, d. h. $y = x$, also ist es eine grade Linie, welche gegen die Abscisse unter einen Winkel von 45° geneigt ist.

§. 141.

Wenn für einen gewissen Punct einer Curve die Berührende zwischen der Curve und der Abscisse liegt, so nennt man die Curve an der Stelle **conver** gegen die Abscisse; liegt aber die Curve zwischen der Berührenden und der Abscisse, so heißt sie für den Punct **concav** gegen die Abscisse.

§. 142.

Lehrsatz.

Ist die Ordinate einer Curve accelerirend wachsend zu einem Zustande gekommen, und gehet accelerirend wachsend weiter, oder ist sie retardirend abnehmend zu jenem Zustande gelangt und gehet retardirend abnehmend weiter; so ist die Curve für diesen Zustand conver gegen die Abscisse. Ist sie aber retardirend wachsend angekommen, und gehet retardirend wachsend weiter, oder ist sie accelerirend abnehmend angekommen, und gehet eben so fließend weiter; so ist die Curve für diesen Punct gegen die Abscisse concav.

Denn wenn drei Curven (Fig. 7.) von einem gleichen Zustande PM an mit gleichem Ordinaten-Bestreben so wachsen, daß die eine mit Acceleration, die andere mit Gleichförmigkeit, die dritte mit Retardation fließt, und alle drei eben so wachsend zu jenem Zustande PM gekommen sind, so, daß also die gleichförmig wachsende oder die grade Linie die Berührende der beiden andern Curven in M ist; so liegt nach §. 100. bei der accelerirend wachsenden ME die Tangente in den vorhergehenden und nachfolgenden Zuständen zwischen der Curve und der Abscisse, da die Ordinate der Curve sowohl vor als nach dem Zustande in größeren Zuständen verweilte, als die der graden Linie. Bei der retardirend wachsenden aber liegt die Curve zwischen der Tangente und der Abscisse, weil die Ordinate der Curve sowohl vor als nach dem Zustande in kleineren Zuständen verweilte, als die der graden Linie. Die erste ist also conver, die andere concav gegen die Abscisse. Betrachtet man nun den Lauf aller drei

Linien rückwärts, so, daß ihr gleiches Bestreben jetzt nicht mehr $\frac{dy}{\Delta x}$, sondern $-\frac{dy}{\Delta x}$ ist; so wird die Curve, welche mit Acceleration zunahm, jetzt mit Retardation abnehmen, die hingegen, welche mit Retardation zunahm, wird jetzt accelerirend abnehmen. (§. 123.)

So lange also die Ordinate einer Curve mit Acceleration wächst, oder mit Retardation abnimmt, so lange ist die Curve convex gegen die Abscisse; so lange sie hingegen mit Retardation wächst, oder mit Acceleration abnimmt, so lange ist sie concav gegen die Abscisse.

§. 143.

Um also aus der Gleichung für eine Curve zu erkennen, ob die Curve für einen gewissen Zustand der Ordinate convex, oder concav gegen die Abscisse ist, d. h. ihre erhabene oder hohle Seite der Abscisse zuwendet, hat man nur nöthig, die Lehrsätze anzuwenden, welche auf das accelerirende oder retardirende Fließen Bezug haben.

1. Soll die Curve für eine gewisse Ordinate convex seyn, so muß diese, wenn sie zunahm, oder wenn $\frac{dy}{\Delta x}$ mit y (oder der Ordinate) einstimmig ist, mit Acceleration angekommen seyn, und zugleich accelerirend weiter fließen, d. h. es muß $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ mit $\frac{dy}{\Delta x}$ also auch mit y einstimmig seyn, oder wenn $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ für diesen Zustand selbst $= 0$ gefunden wird, so muß das Differentialverhältniß, welches nach dem ersten zuerst wieder reell wird, von paarem Range, und mit $\frac{dy}{\Delta x}$ also auch mit y einstimmig seyn. (§. 119.) Nimmt aber die Ordinate ab, so, daß $\frac{dy}{\Delta x}$ mit y widerstreitend ist; so mußte sie im Falle der Convexität retardirend angekommen seyn, und retardirend weiter fließen, d. h. es mußte $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ mit $\frac{dy}{\Delta x}$ widerstreitend, also mit y einstimmig seyn. Wird aber dieses zweite Differentialverhältniß selbst $= 0$, so muß das der nachfolgenden Differentialverhältnisse, welches für diesen Zustand

zuerst wieder reell wird, von paarem Range, und mit $\frac{dy}{\Delta x}$ widerstreitend, (§. 119.) d. h. mit y oder der Ordinate einstimmig seyn.

Die Ordinaten mögen also wachsen, oder abnehmen, soll die Curve für eine Ordinate convex seyn, so ist erfoderlich, daß allgemein $\frac{d^{2n} y}{\Delta x^{2n}}$ das erste reell werdende Differentialverhältniß, und daß dieses mit der Ordinate einstimmig sey.

2. Soll die Curve für die Ordinate y concav seyn, so muß diese, wenn sie zunahm, so, daß $\frac{dy}{\Delta x}$ mit y einstimmig ist, retardirend angekommen seyn, und retardirend weiter fließen, es muß also $\frac{d^2 y}{\Delta x^2}$ mit $\frac{dy}{\Delta x}$ also auch mit y widerstreitend seyn, oder, wenn das zweite Differentialverhältniß für die Ordinate y selbst = o werden sollte, so muß $\frac{d^{2n} y}{\Delta x^{2n}}$, als das erste nach $\frac{dy}{\Delta x}$ reell werdende Differentialverhältniß mit $\frac{dy}{\Delta x}$ also auch mit y widerstreitend gefunden werden. (§. 119.) Wenn aber die Ordinate abnahm, so, daß $\frac{dy}{\Delta x}$ mit y widerstreitend ist, so muß sie im Falle der Concavität accelerirend angekommen seyn, und zugleich accelerirend weiter fließen, d. h. es muß $\frac{d^2 y}{\Delta x^2}$, oder, wenn es = o ist, allgemein $\frac{d^{2n} y}{\Delta x^{2n}}$ mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig, d. h. mit y widerstreitend seyn.

Möge also die Ordinate wachsen, oder abnehmen, immer ist $\frac{d^2 y}{\Delta x^2}$ oder allgemeiner $\frac{d^{2n} y}{\Delta x^{2n}}$ mit y, oder dem Zustande der Ordinate widerstreitend, wenn die Curve für sie concav seyn soll.

Z. B. Die Gleichung für die Parabel ist $y = \mp\sqrt{bx}$, wenn AP (Fig. 9.) die Abscisse und der Scheitelpunct der Anfangspunct der Coordinaten ist. $\sqrt{bx}$ gilt für den positiven, $-\sqrt{bx}$ für den negativen Schenkel. Für den ersteren hat man $\frac{dy}{\Delta x} = + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{x}}$, $\frac{d^2 y}{\Delta x^2} = - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{b}{x^3}}$; da nun dieses mit der Ordinate widerstreitend ist, und zwar für jeden Werth von x, welcher zu reellen Ordinaten gehört; so folgt, daß der ganze positive Schenkel concav gegen die Abscisse ist. Betrachtet man den negativen Schenkel, so hat man für ihn $y = -\sqrt{bx}$, $\frac{dy}{\Delta x} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{x}}$ und $\frac{d^2y}{\Delta x^2} = +\frac{1}{4}\sqrt{\frac{b}{x^3}}$, folglich ist das zweite Differentialverhältniß für jeden Werth von x mit y oder der Ordinate widerstreitend, und also ist auch der negative Schenkel überall concav gegen die Abscisse.

Eben so kann man das zweite Differentialverhältniß aus der Gleichung der Ellipse, Hyperbel, des Kreises u. s. w. berechnen, um daraus zu sehen, ob diese Curven convex oder concav gegen die Abscisse sind.

Die Gleichung für die logarithmische Linie ist $y = e^x$, und also $\frac{dy}{\Delta x} = e^x$, $\frac{d^2y}{\Delta x^2} = e^x$; es ist daher das zweite Differentialverhältniß überall für jeden Werth von x, welcher zu reellen Ordinaten führt, mit y einstimmig, die Curve also überall convex gegen die Abscisse.

§. 144.

Wenn eine Curve aus Concavität in Convexität, oder umgekehrt, aus Convexität in Concavität übergehet, so heißt ein solcher Punct des Ueberganges ein **Wendungspunct** der Curve.

§. 145.

Lehrsatz.

Für einen Wendungspunct einer Curve ist $\frac{d^2y}{\Delta x^2} = o$, und das erste der nachfolgenden Differentialverhältnisse, welches für diesen Werth wieder reell wird, muß von unpaarem Range seyn, und zwar mit y, oder der zu jenem Puncte gehörenden Ordinate, einstimmig, wenn die Curve aus Concavität in Convexität übergehet, mit y

widerstreitend, wenn der umgekehrte Fall eintritt.

1. Gehet eine Curve aus Concavität in Convexität über, so ist sie entweder retardirend wachsend angekommen und gehet accelerirend wachsend weiter, so, daß also $\frac{dy}{\Delta x}$ mit y einstimmig, $\frac{d^2y}{\Delta x^2} = 0$ und das erste der nachfolgenden Differentialverhältnisse, welches für diesen Werth wieder reell wird, von unpaarem Range, und mit $\frac{dy}{\Delta x}$, (§. 120.) also auch mit y einstimmig ist: oder sie ist accelerirend abnehmend angekommen, und gehet retardirend abnehmend weiter, so, daß $\frac{dy}{\Delta x}$ mit y widerstreitend, $\frac{d^2y}{\Delta x^2} = 0$ und das erste der folgenden Differentialverhältnisse, welches wieder reell wird, von unpaarem Range und zwar mit $\frac{dy}{\Delta x}$ widerstreitend (§. 120.) also mit y einstimmig ist.

Gehet daher die Curve aus Concavität zur Convexität über, so ist $\frac{d^2y}{\Delta x^2} = 0$ und $\frac{d^{2n+1}y}{\Delta x^{2n+1}}$ mit y einstimmig.

2. Gehet die Curve aber aus Convexität in Concavität über, so ist sie entweder accelerirend wachsend angekommen und gehet retardirend wachsend weiter, so, daß also $\frac{dy}{\Delta x}$ mit y einstimmig, $\frac{d^2y}{\Delta x^2} = 0$ und dasjenige der nachfolgenden Differentialverhältnisse, welches für jenen Zustand von y zuerst wieder reell wird, von unpaarem Range, und zugleich mit $\frac{dy}{\Delta x}$, (§. 120.) also auch mit y widerstreitend ist: oder sie ist retardirend abnehmend angekommen, und gehet accelerirend abnehmend weiter, so, daß $\frac{dy}{\Delta x}$ mit y widerstreitend, $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ aber $= 0$ und $\frac{d^{2n+1}y}{\Delta x^{2n+1}}$ mit $\frac{dy}{\Delta x}$ einstimmig, (§. 120.) d. h. mit y widerstreitend ist.

Gehet daher eine Curve aus Convexität in Concavität über, so ist immer $\frac{d^2y}{\Delta x^2} = 0$ und $\frac{d^{2n+1}y}{\Delta x^{2n+1}}$ mit y widerstreitend.

§. 146.

Die Lehren über Maxima und Minima im ersten Abschnitte finden bei den Ordinaten der Curven unmittelbar ihre Anwendung.

Um z. B. zu erforschen, ob unter den Ordinaten der Ellipse ein Maximum oder Minimum Statt finde, so differentire man ihre Gleichung:

$$y = \sqrt{(bx - \frac{b}{a} x^2)}$$

$$\frac{dy}{\Delta x} = \frac{b - \frac{2b}{a} x}{2\sqrt{(bx - \frac{b}{a} x^2)}}$$

Setzt man diesen letzten Ausdruck $= 0$, so erhält man $x = \frac{1}{2} a$. Für die Abscisse, welche der halben großen Axe gleich ist, findet also ein solcher Werth der Ordinate Statt; ob es aber ein Maximum oder ein Minimum ist, das hängt noch von dem Zeichen von $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$, oder, wenn dieses für $x = \frac{1}{2} a$, $= 0$ werden sollte, von dem Zeichen desjenigen Differentialverhältnisses ab, welches für diesen Werth $\frac{1}{2} a$ von x zuerst wieder reell wird. Ist dieses jedoch von unpaarem Range, so wird $x = \frac{1}{2} a$ weder zu einem Maximum noch zu einem Minimum gehören. Es ist nun:

$$\frac{d^2y}{\Delta x^2} = - \frac{b}{a\sqrt{(bx - \frac{b}{a} x^2)}} - \frac{(b - \frac{2b}{a} x)^2}{4\sqrt{(bx - \frac{b}{a} x^2)^3}}$$

Setzt man hierin für x den Werth $\frac{1}{2} a$, so ist der Ausdruck:

$$= - \frac{b}{a\sqrt{(\frac{1}{2} ab - \frac{1}{4} ab)}} - \frac{(b - b)^2}{4\sqrt{(\frac{1}{2} ab - \frac{1}{4} ab)^3}}$$

$$= - \frac{b}{a\sqrt{\frac{1}{4} ab}} = - 2\sqrt{\frac{b}{a^3}}$$

Da dieses mit der positiven Ordinate, für welche das zweite Differentialverhältniß berechnet wurde, widerstreitend ist, so ist der Zustand der Ordinate ein Maximum. Für negative Ordinaten hat man die Gleichung

$y = - \sqrt{(bx - \frac{b}{a} x^2)}$ und $\frac{d^2y}{\Delta x^2} = 2\sqrt{\frac{b}{a^3}}$ für $x = \frac{1}{2} a$, folglich ist auch für dieselbe Abscisse auf der negativen Seite ein Maximum.

§. 147.

Sehr geeignet zu Untersuchungen über Concavität und Convexität, Wendungspuncte und über Maxima und Minima, ist die Curve, welche durch die Gleichung:

$$y = {}^3\sqrt{x} + \sqrt{x}$$

ausgedrückt wird.

Die Curve bekommt zwei Schenkel, da für jeden Werth von x, zwei Werthe von y, d. h. zwei Ordinaten hervorgehen müssen.

Die Gleichung für den einen Schenkel ist:

$$y = {}^3\sqrt{x} + \sqrt{x}$$

die für den andern:

$$y = {}^3\sqrt{x} - \sqrt{x}$$

Für den positiven Schenkel ist:

$$\frac{dy}{\Delta x} = \frac{1}{3\,{}^3\sqrt{x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{d^2y}{\Delta x^2} = -\frac{2}{9\,{}^3\sqrt{x^5}} - \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

Für den negativen Schenkel ist hingegen:

$$\frac{dy}{\Delta x} = \frac{1}{3\,{}^3\sqrt{x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{d^2y}{\Delta x^2} = -\frac{2}{9\,{}^3\sqrt{x^5}} + \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

Nur für ein positives x sind wegen $\sqrt{x}$ Ordinaten möglich, und je größer x wird, desto größer werden die Ordinaten des positiven Schenkels AD, (Fig. 13.) weil für ihn $\frac{dy}{\Delta x}$ nicht negativ werden kann, die Ordinate also immer ein Bestreben zu wachsen hat. Dagegen wird aber $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$ negativ, und zwar für jeden Werth von x, welcher zu reellen Ordinaten führt, also mit dem ersten Differentialverhältnisse widerstreitend, und folglich ist dieser Schenkel überall concav gegen die Abscisse. Der andere Schenkel ist vom Anfangspuncte so lange positiv, so lange $\sqrt[3]{x}$ größer ist, als $\sqrt{x}$, d. h. so lange x kleiner ist, als 1. Für $x = 1$ schneidet die Curve die Abscisse, denn alsdann ist $y = 0$. Für x größere Werthe, als 1 gesetzt, ist der Schenkel beständig negativ. Um zu erforschen, ob dieser Schenkel einen größesten, oder kleinsten Werth der Ordinate habe, setze man:

$$\frac{dy}{\Delta x} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$$

so erhält man:

$$2\sqrt{x} = 3\sqrt[3]{x^2}$$
$$2\sqrt[6]{x^3} = 3\sqrt[6]{x^4}$$
$$x^3 = (\tfrac{3}{2})^6\, x^4$$
$$x = (\tfrac{2}{3})^6.$$

Substituirt man diesen Werth von x in

$$\frac{d^2y}{\Delta x^2} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} + \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

so hat man:

$$-\frac{2}{9.\,(\frac{2}{3})^{10}} + \frac{1}{4.\,(\frac{2}{3})^9}$$

Nun ist aber $9.\,(\frac{2}{3})^{10} = 9.\,\frac{2}{3}.\,(\frac{2}{3})^9 = 6\,(\frac{2}{3})^9$, daher das zweite Differentialverhältniß für $x = (\frac{2}{3})^6$:

$$-\frac{1}{3\,(\frac{2}{3})^9} + \frac{1}{4\,(\frac{2}{3})^9}$$

welche Zahl negativ ist. Da nun die Ordinate positiv ist, also das zweite Differentialverhältniß mit ihr widerstreitend, so folgt, daß die Ordinate PM, welche zu der Abscisse $AP = (\frac{2}{3})^6$ gehört, ein Maximum ist.

Um ferner zu erforschen, ob die Curve für den Schenkel $y = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x}$ einen Wendungspunct habe, setze man das zweite Differentialverhältniß $= 0$, also

$$\frac{d^2y}{\Delta x^2} = -\frac{2}{9.\sqrt[3]{x^5}} + \frac{1}{4\sqrt{x^3}} = 0$$

woraus folgt:

$$9.\,\sqrt[3]{x^5} = 8\sqrt{x^3}$$
also $$9.\,\sqrt[6]{x^{10}} = 8\sqrt[6]{x^9}$$
$$(\tfrac{9}{8})^6\, x^{10} = x^9$$
$$x = (\tfrac{8}{9})^6$$

Sey dieser Werth von $x = AQ$, so ist der Punct N der Curve, welcher durch diese Abscisse bestimmt wird, der Wendungspunct.

Um nun zu sehen, ob hier die Curve aus Convexität zur Concavität, oder umgekehrt den Uebergang macht, muß man das dritte Differentialverhältniß berechnen:

$$\frac{d^3 y}{\Delta x^3} = \frac{10}{27 \cdot \sqrt[3]{x^8}} - \frac{3}{8 \sqrt{x^5}}$$

Für x den Werth $(\frac{8}{9})^6$ substituirt, erhält man:

$$\frac{10}{27 \cdot \sqrt[3]{(\frac{8}{9})^{48}}} - \frac{3}{8 \sqrt{(\frac{8}{9})^{30}}} = \frac{10}{27 \cdot (\frac{8}{9})^{16}} - \frac{3}{8 (\frac{8}{9})^{15}}$$

$$= \frac{10}{27 \cdot \frac{8}{9} (\frac{8}{9})^{15}} - \frac{3}{8 (\frac{8}{9})^{15}}$$

$$= \frac{10}{24 (\frac{8}{9})^{15}} - \frac{9}{24 (\frac{8}{9})^{15}} = \frac{1}{24 (\frac{7}{9})^{15}}$$

Da dieses positiv, also mit der Ordinate einstimmig ist, so gehet die Curve hier aus Concavität in Convexität über.

Für x Werthe gesetzt, welche größer sind, als 1, ist y negativ, und $\frac{d^2 y}{\Delta x^2} = -\frac{2}{9 \sqrt[3]{x^5}} + \frac{1}{4 \sqrt{x^3}}$ positiv, also mit y widerstreitend, und die Curve ist also hier concav gegen die Abscisse. Die 13te Figur stellt den Lauf der Curve ungefähr vor.

Von der Berührung krummer Linien unter sich.

§. 148.

Wenn zwei Curven auf eine und dieselbe Abscisse und den nämlichen Anfangspunct bezogen werden, so, daß beider Ordinaten Functionen derselben Hauptgröße x sind, oder von derselben Gelegenheit abhängen, die eine

$$y = \varphi(x)$$

die andere

$$z = \psi(x)$$

und beide sollen für einen gewissen Werth von x in einen und denselben Zustand kommen; so muß für diesen Werth von x, welcher p seyn mag, $z = y$, oder die Gleichungen von z und y müssen so beschaffen seyn, daß

$$\varphi(p) = \psi(p).$$

Man sagt in diesem Falle, die Curven schneiden sich. Ist nun außer der Gleichheit der Ordinaten auch noch

$$\frac{dz}{\Delta x} = \frac{dy}{\Delta x},$$

d. h. haben beide Curven in jenem Zustande auch ein gleiches Ordinaten-Bestreben, also eine gemeinschaftliche Tangente, so berühren sie sich, und man nennt diese Berührung vom ersten Grade. Beide Curven haben in diesem Zustande ein gewisses Bestreben, sich an einander anzuschmiegen, denn beide sind vermöge ihrer gemeinschaftlichen Tangente bestrebt, nach einer und derselben Direction fortzugehen. Ob aber jenes Bestreben, sich an einander anzuschmiegen, größer oder geringer ist, das hängt davon ab, ob in der einen Curve das Bestreben, die Direction zu verändern von demselben Bestreben der andern Curve mehr oder weniger abweicht. Soll aber die Direction verändert werden, so wird dadurch auch $\frac{dy}{\Delta x}$, als Tangente des Winkels, welcher eben die Direction bestimmt, verändert, und das Bestreben, womit sich $\frac{dy}{\Delta x}$ ändert, ist $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$, bei der andern Curve $\frac{d^2z}{\Delta x^2}$ haben beide Curven auch noch dieses Bestreben in jenem Zustande mit einander gemein, d. h. ist außer $\frac{dy}{\Delta x} = \frac{dz}{\Delta x}$, auch noch $\frac{d^2y}{\Delta x^2} = \frac{d^2z}{\Delta x^2}$, so werden sich eben dadurch die Curven näher an einander anzuschließen bestrebt seyn, als bei jeder andern Voraussetzung in Beziehung auf die zweiten Differentialverhältnisse. Gehet man von dem einen Bestreben zu höheren über, so findet sich durch fortgesetzte Schlüsse dieser Art, daß sich beide Curven desto genauer an einander anschließen, je mehr Differentialverhältnisse bei beiden ununterbrochen gleich sind.

Man nennt, wie schon oben erwähnt, eine Berührung, wobei bloß $\frac{dy}{\Delta x} = \frac{dz}{\Delta x}$ ist, eine Berührung vom ersten Grade, ist außerdem auch noch $\frac{d^2y}{\Delta x^2} = \frac{d^2z}{\Delta x^2}$, so ist die Berührung vom zweiten Grade, u. s. w. allgemein, ist für einen Zustand der Abscisse, wo $z = y$ ist,

$\frac{dy}{\Delta x} = \frac{dz}{\Delta x}$, $\frac{d^2 y}{\Delta x^2} = \frac{d^2 z}{\Delta x^2}$ u. s. f., und endlich $\frac{d^n y}{\Delta x^n}$ $= \frac{d^n z}{\Delta x^n}$, so ist die Berührung vom nten Grade.

Auf diese Weise kann man z. B. parabolische Curven finden, die sich so genau an eine andere Curve anschließen, oder sie so innig berühren, als man nur immer will. Es sey die Gleichung der Curve:

$$y = \varphi(x)$$

und die einer parabolischen Curve:

$$z = a + bx + gx^2$$

Es wird verlangt, daß beide für eine gewisse Abscisse nicht allein eine gemeinschaftliche Ordinate haben, sondern sich in dem Puncte im zweiten Grade berühren, wobei also die Frage entstehet, wie die Gleichung von z, oder die Constanten a, b, g bestimmt werden müssen. Ist die Abscisse, für welche beider Ordinaten gleich sind, $= \alpha$, so hat man:

$$\varphi(\alpha) = a + b\alpha + g\alpha^2$$

also $a = \varphi(\alpha) - b\alpha - g\alpha^2$.

Ferner hat man:

$$\frac{dy}{\Delta x} = b + 2gx$$

wenn in beiden Ausdrücken statt x der Werth α gesetzt wird, also

$$\frac{dy}{\Delta x} = b + 2g\alpha$$

endlich:

$$\frac{d^2 y}{\Delta x^2} = 2g,$$

daher $g = \frac{d^2 y}{2\Delta x^2}$, $b = \frac{dy}{\Delta x} - 2g\alpha = \frac{dy}{\Delta x} - \alpha\frac{d^2 y}{\Delta x^2}$, wo $\frac{dy}{\Delta x}$ und $\frac{d^2 y}{\Delta x^2}$ durch α bestimmte Werthe angenommen haben. Daraus folgt auch noch der Werth von a

$$= \varphi(\alpha) - \alpha\frac{dy}{\Delta x} + \alpha^2\frac{d^2 y}{2\Delta x^2}.$$

Nimmt man die Gleichung der parabolischen Curve:

$$z = a + bx + fx^2 + gx^3 \cdot$$

an, so kann diese mit der gegebenen Curve bis zum dritten Grade eine Berührung eingehen, u. s. w.

Hat überhaupt die Gleichung der Curve, welche man mit einer andern in Berührung bringen will, nur eine Nebengröße, so kann man diese immer so annehmen, daß die Curve für eine gewisse Absciſſe mit der andern eine gemeinschaftliche Ordinate hat. Wollte man aber ferner die Voraussetzung machen, beide Curven sollten in dem gemeinschaftlichen Puncte auch dieselbe Tangente haben, d. h. sich im ersten Grade berühren, in welchem Falle man das erste Differentialverhältniß der einen dem der andern gleich setzen müßte; so fehlt zur Auffindung der Bedingung, unter welcher jenes geschehen kann, eine Nebengröße, für welche aus der Gleichsetzung jener Differentialverhältnisse ein bestimmter Werth hervorgehen müßte. Hätte also die Curve zwei Nebengrößen, so wäre man im Stande, sie so zu bestimmen, daß beide Curven nicht allein eine gemeinschaftliche Ordinate, sondern auch in dem gemeinschaftlichen Puncte dieselbe Tangente haben. So siehet man also allgemein, wenn die Gleichung einer Curve eine Nebengröße besitzt, so kann sie mit einer beliebigen andern Curve für eine beliebig anzunehmende Absciſſe eine und dieselbe Ordinate haben; hat die Gleichung aber zwei Nebengrößen, so ist es zu bewirken, daß beide Curven in dem gemeinschaftlichen Puncte auch eine Berührung des ersten Grades mit einander eingehen können; sind ferner in jener Gleichung drei Nebengrößen, so kann die Berührung vom zweiten Grade seyn, und allgemein, begreift die Gleichung n Nebengrößen in sich, so kann man dieselben so bestimmen, daß beide Curven in dem gemeinschaftlichen Puncte eine Berührung des $n-1$ten Grades mit einander haben.

§. 149.

Wichtig sind die Berührungen, welche ein Kreis mit einer Curve eingehen kann. Will man die Gleichung des Kreises ganz allgemein haben, so sey C (Fig. 14.) der Mittelpunct, $CM = r$ der Halbmesser desselben. Der Anfangspunct der Coordinaten sey ganz allgemein in A, und zur Absciſſenrichtung AB angenommen. Soll die Lage des Kreises bestimmt seyn, so muß man die des Mittelpuncts haben, d. h. die Coordinaten desselben müssen als bekannt angenommen werden. Es sey demnach $AB = a$, $BC = b$, so hat man $PB = QC = a - x$, und $QM = y - b$, wenn AP die Abscisse x, PM die Ordinate y bedeutet. Also ist:

$$MQ^2 = MC^2 - QC^2$$

d. h.

$$(y - b)^2 = r^2 - (a - x)^2$$

und

$$y = b \mp \sqrt{(r^2 - (a - x)^2)}$$

welches die allgemeinste Gleichung für den Kreis ist. Da diese drei Nebengrößen b, r und a in sich begreift, so kann der Kreis höchstens eine Berührung des zweiten Grades mit einer andern Curve eingehen.

Nun sey irgend eine Curve EMF (Fig. 14.) durch die Gleichung:

$$z = \varphi(x)$$

gegeben, es wird verlangt, durch den Punct M einen Kreis zu legen, welcher die Curve im zweiten Grade berührt, d. h. den Halbmesser r, und die Lage seines Mittelpuncts, also dessen Coordinaten $AB = a$, $BC = b$ zu finden.

Die beiden Gleichungen sind:

$$z = \varphi(x) \text{ und } y = b \mp \sqrt{(r^2 - (a - x)^2)}$$

und die drei Bedingungen:

$$z = y, \ \frac{dz}{\Delta x} = \frac{dy}{\Delta x}, \ \frac{d^2z}{\Delta x^2} = \frac{d^2y}{\Delta x^2}.$$

Nun ist aber

$$\frac{dy}{\Delta x} = \frac{(a - x)}{\sqrt{(r^2 - (a - x)^2)}}, = \frac{a - x}{y - b}$$

$$\frac{d^2y}{\Delta x^2} = -\frac{(y - b) - (a - x)\frac{dy}{\Delta x}}{(y - b)^2}$$

$$= -\frac{y - b + \frac{(a - x)^2}{y - b}}{(y - b)^2} = -\frac{(y - b)^2 + (a - x)^2}{(y - b)^3}$$

Da nun $y = z$ und $\frac{dy}{\Delta x} = \frac{dz}{\Delta x}$ seyn soll, so hat man:

$$\frac{dy}{\Delta x} = \frac{dz}{\Delta x} = \frac{a - x}{z - b} \text{ und, da } \frac{d^2y}{\Delta x^2} = \frac{d^2z}{\Delta x^2} \text{ ist,}$$

$$\frac{d^2y}{\Delta x^2} = \frac{d^2z}{\Delta x^2} = -\frac{(z-b)^2 + (a-x)^2}{(z-b)^3}$$

$$= -\frac{(z-b)^2 + (z-b)^2\left(\frac{dz}{\Delta x}\right)^2}{(z-b)^3}$$

$$= -\frac{1 + \left(\frac{dz}{\Delta x}\right)^2}{z-b}$$

also

$$z - b = -\frac{1 + \left(\frac{dz}{\Delta x}\right)^2}{\frac{d^2z}{\Delta x^2}}$$

und

$$b = z + \frac{1 + \left(\frac{dz}{\Delta x}\right)^2}{\frac{d^2z}{\Delta z^2}}$$

Eben so findet man:

$$\frac{d^2z}{\Delta x^2} = -\frac{(a-x)^2\left(\frac{\Delta x}{dz}\right)^2 + (a-x)^2}{(a-x)^3\left(\frac{\Delta x}{dz}\right)^3}$$

$$= -\frac{1 + \left(\frac{\Delta x}{dz}\right)^2}{(a-x)\left(\frac{\Delta x}{dz}\right)^3}$$

wenn man nämlich $z - b = \frac{a-x}{\frac{dz}{\Delta x}}$ setzt, welches aus der obigen Gleichung für $\frac{dz}{\Delta x}$ folgt. Daher findet man:

$$a - x = -\frac{1 + \left(\frac{\Delta x}{dz}\right)^2}{\frac{d^2z}{\Delta x^2}\cdot\left(\frac{\Delta x}{dz}\right)^3} \text{ also}$$

$$a = x - \frac{\left(\frac{dz}{\Delta x}\right)^3 + \frac{dz}{\Delta x}}{\frac{d^2z}{\Delta x^2}}$$

Substituirt man endlich in die Gleichung:

$$r^2 = (z-b)^2 + (a-x)^2$$

für $z - b$ und $a - x$ die gefundenen Werthe, so hat man:

$$r^2 = \frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{\Delta x}\right)^2\right]^2}{\left(\frac{d^2 z}{\Delta x^2}\right)^2} + \frac{\left[\left(\frac{dz}{\Delta x}\right)^3 + \frac{dz}{\Delta x}\right]^2}{\left(\frac{d^2 z}{\Delta x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(1 + \left(\frac{dz}{\Delta x}\right)^2\right)^3}{\left(\frac{d^2 z}{\Delta x^2}\right)^2} \text{ folglich}$$

$$r = \mp \frac{\left(1 + \left(\frac{dz}{\Delta x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 z}{\Delta x^2}}.$$

Dieses ist also der Halbmesser des Kreises, welcher die Curve im zweiten Grade berührt, während die für a und b gefundenen Ausdrücke die Coordinaten des Mittelpuncts darstellen.

Von der Quadratur der Curven.

§. 150.

Wenn die Gleichung für eine Curve gegeben, d. h. das Gesetz bekannt ist, nach welchem die Ordinaten fließen; so ist auch der von der Ordinate beschriebene Flächenraum AB MP (Fig. 15.) eine Fluente, welche von der Abscisse AP als Gelegenheit zu fließen abhängig seyn wird. Ist die Ordinate y durch die Gleichung $y = \varphi(x)$ gegeben, so wird auch der Flächenraum, z, durch eine Function von x dargestellt werden können, und diese Function finden, heißt die Curve **quadriren**.

§. 151.

Wenn die parallele Ordinate einer Curve nach dem vorgeschriebenen Gesetze fließt, so beschreibt sie also einen Flächenraum, und es ist klar, daß eine größere Ordinate PM das Bestreben habe, einen größeren Flächenraum zu beschreiben, als eine kleinere Ordinate AB, d. h. daß die Curve da, wo die Ordinate größer ist, auch ein größeres Bestreben eine Fläche zu beschreiben, besitze, als da, wo dieselbe kleiner ist.

Dieses Bestreben eine Curvenfläche zu beschreiben, soll in der Folge das Flächenbestreben der Curve heißen.

Wenn also die Ordinaten wachsen, so wird auch das Flächenbestreben größer, nehmen aber die Ordinaten ab, so wird auch dieses Bestreben immer kleiner; soll endlich das Flächenbestreben stets dasselbe bleiben, so dürfen die Ordinaten weder wachsen noch abnehmen, d. h. die Curve ist dann eine grade Linie, welche mit der Abscisse parallel läuft, also die Gleichung $y = a$ hat. In diesem Falle fließt die Fläche mit Gleichförmigkeit, und die Gleichung für dieselbe ist bald gefunden.

Ist der Coordinatenwinkel BAP (Fig. 5.) $= \psi$, so ist die Fläche ABPM, welche von $AP = x$ abhängt, $= x \, a \operatorname{Sin} \psi = z$, daher das constante Flächenbestreben in diesem Falle =

$$\frac{dz}{\Delta x} = a \operatorname{Sin} \psi.$$

§. 152.

Lehrsatz.

Das Flächenbestreben einer Curve für eine beliebige Abscisse oder Ordinate ist gleich der Ordinate multiplicirt mit dem Sinus des Coordinatenwinkels.

Es mögen zwei Linien CD und BM, (Fig. 15.) auf dieselbe Abscisse AP und denselben Anfangspunct A der Coordinaten bezogen, für eine gewisse Abscisse AP dasselbe Flächenbestreben haben, und so angenommen werden, daß die Fläche der einen CD mit Gleichförmigkeit, die der andern BM allgemein mit Ungleichförmigkeit, gleichviel, ob mit Acceleration oder Retardation, fließe; so folgt, daß beide Curven für jene Abscisse AP eine gleiche Ordinate PM haben müssen, weil sie sonst nach dem vorhergehenden § nicht gleiches Flächenbestreben haben könnten; ferner, daß die Linie CD, deren Ordinate, gleichförmig einen Flächenraum beschreibt, eine grade, und zwar mit der Abscisse parallel sey, also die Gleichung $y = a$ habe.

Das Flächenbestreben der Graden ist aber überall und also auch für die Abscisse AP, $= a \operatorname{Sin} \psi$, welches auch zugleich das der andern Curve für dieselbe Abscisse darstellt, wie angenommen wurde. Da aber für diesen Zustand die Ordinaten beider Linien gleich seyn müssen, also $a = y$, so folgt, daß das Flächenbestreben der beliebig angenommenen Curve für die Ordinate y

$$= y \operatorname{Sin} \psi$$

d. h. der Ordinate multiplicirt in den Sinus des Coordinatenwinkels gleich ist.

§. 153.

Wenn also die Gleichung für eine Curve gegeben ist:

$$y = \varphi(x)$$

und man will daraus die Gleichung für die Fläche z finden, welche gleichfalls von x abhängig seyn wird, so kann man sie zuerst fingiren

$$z = \chi(x).$$

Da nun das Flächenbestreben, oder das Bestreben, womit z fließt, aus der Gleichung für y bekannt ist, und daßelbe dem ersten Differentialverhältnisse von z gleich seyn muß, so hat man:

$$\frac{dz}{\Delta x} = y \operatorname{Sin} \psi$$

also $z = \operatorname{Sin} \psi \int y \, \Delta x + \text{Const.}$

welches die verlangte Gleichung ist.

Ist der Coordinatenwinkel ein rechter, so ist

$$z = \int y \, \Delta x + \text{Const.}$$

§. 154.

Will man nun einige Curven quadriren, und wählt dazu z. B. die Parabel, wobei man die Axe als Abscisse, den

Anfangspunct im Scheitel und die Coordinaten rechtwinkelig annimmt, so hat man:

$$y = \sqrt{bx}.$$

$$z = \int y \,\Delta x = \int \sqrt{(bx)}\,\Delta x$$

$$= \frac{2\sqrt{bx^3}}{3} + \text{Const.}$$

Für $x = 0$ ist auch $z = 0$ also auch Const. $= 0$, daher:

$$z = \tfrac{2}{3}\sqrt{bx^3} = \tfrac{2}{3}x\sqrt{bx} = \tfrac{2}{3}xy.$$

Nun ist aber xy dem Recht-Ecke APMB (Fig. 16.) gleich, und also ist das Stück APM der Parabel $= \frac{2}{3}$ des Recht-Ecks APMB, oder MAm $= \frac{2}{3}$ BMmb.

Ist der Coordinatenwinkel der Parabel $= \psi$, der dazu gehörende Durchmesser der Parabel AP (Fig. 17.) die Abscissenrichtung, und der Anfangspunct in A; so ist die Gleichung:

$$y = \frac{1}{\operatorname{Sin}\psi}\sqrt{bx},$$

also hat man:

$$z = \int \sqrt{(bx)}\,\Delta x = \tfrac{2}{3}x\sqrt{bx} + \text{Const.}$$

Da hier wieder für $x = 0$ auch $z = 0$ wird, so ist auch die Constante $= 0$. Daher

$$z = \tfrac{2}{3}x\sqrt{bx} = \tfrac{2}{3}\operatorname{Sin}\psi\; yx,$$

folglich ist die Fläche APM $= \frac{2}{3}$ des Parallelograms ABMP und also die Fläche mAM $= \frac{2}{3}$ BMmb.

§. 154.

Die Gleichung für den Kreis ist:

$$y = \sqrt{(2rx - x^2)}$$

wenn r der Radius ist, und der Anfangspunct im Scheitel angenommen wird. Man hat also:

$$\int y\,\Delta x = \int \sqrt{(2rx - x^2)}\,\Delta x.$$

Entwickelt man $\sqrt{(2rx - x^2)}$ nach dem binomischen Lehrsatze, so ist:

$$\sqrt{(2rx - x^2)} = \sqrt{(2rx)}.\sqrt{\left(1 - \frac{x}{2r}\right)}$$

$$= \sqrt{(2rx)}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{x}{2r} - \frac{1}{8}\frac{x^2}{(2r)^2} - \frac{1}{16}\frac{x^3}{(2r)^3} - \frac{5}{128}\frac{x^4}{(2r)^4}\ldots\right)$$

$$= \sqrt{(2rx)}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{x}{r} - \frac{1}{32}\frac{x^2}{r^2} - \frac{1}{128}\frac{x^3}{r^3} - \frac{5}{2048}\frac{x^4}{r^4}\ldots\right)$$

$$= \sqrt{(2r)}\left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4r}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{32r^2}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{128r^3}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{2048r^4}x^{\frac{9}{2}}\ldots\right)$$

folglich

$$\int y\,\Delta x = \sqrt{(2r)}\left(\int x^{\frac{1}{2}}\Delta x - \frac{1}{4r}\int x^{\frac{3}{2}}\Delta x - \frac{1}{32r^2}\int x^{\frac{5}{2}}\Delta x\ldots\right)$$

$$= \sqrt{(2r)}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{10r}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{112r^2}x^{\frac{7}{2}}\ldots\right) + \text{Const.}$$

Für $x = 0$ ist auch das Integral $= 0$, folglich auch Const. $= 0$.

Setzt man für x den Werth r, so erhält man den vierten Theil der Kreisfläche

$$= \sqrt{(2r)}\left(\frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{10}r^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{112}r^{\frac{3}{2}} - \ldots\right)$$

$$= \sqrt{(2)}\left(\frac{3}{3}r^2 - \frac{1}{10}r^2 - \frac{1}{112}r^2\ldots\right)$$

Betrachtet man die Gleichung des Kreises aus dem Mittelpuncte, so ist sie:

$$y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$$

daher:

$$\int y\,\Delta x = \int \sqrt{(r^2 - x^2)}\,\Delta x$$

$$= r\int \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)}\,\Delta x.$$

Nun ist:

$$\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)} = 1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{r^2} - \frac{1}{8}\frac{x^4}{r^4} - \frac{1}{16}\frac{x^6}{r^6}\ldots$$

folglich:

$$\int y\,\Delta x = r\left(\int \Delta x - \frac{1}{2r^2}\int x^2\,\Delta x - \frac{1}{8r^4}\int x^4\,\Delta x\right.$$
$$\left. - \frac{1}{16r^6}\int x^6\,\Delta x\ldots\right)$$

$$= r\left(x - \frac{1}{6r^2}x^3 - \frac{1}{40r^4}x^5 - \frac{1}{112r^6}x^7\ldots\right)$$

$$= rx - \frac{1}{6}\frac{x^3}{r} - \frac{1}{40}\frac{x^5}{r^3} - \frac{1}{112}\frac{x^7}{r^5}\ldots + \text{Const.}$$

für $x = 0$ ist das Integral $= 0$, also verschwindet auch die Constante.

Setzt man hier $x = r$, so erhält man wieder die Fläche des Quadranten

$$= r^2 - \tfrac{1}{6} r^2 - \tfrac{1}{40} r^2 - \tfrac{1}{112} r^2 \ldots$$
$$= r^2 \left(1 - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{40} - \tfrac{1}{112} \ldots\right)$$

§. 156.

Bedeutet a die halbe große Axe, c die halbe kleine Axe, und ist der Anfangspunct im Scheitel A (Fig. 10.), so ist die Gleichung der Ellipse:

$$y = \frac{c}{a} \sqrt{(2ax - x^2)}$$

folglich:

$$\int y \,\Delta x = \frac{c}{a} \int \sqrt{(2ax - x^2)}\, \Delta x$$

Nun ist aber $\int \sqrt{(2ax - x^2)}$ für $x = a$ der Fläche eines Kreisquadranten gleich, welcher zum Halbmesser a hat, und für diesen Werth von x drückt obiges Integral die des elliptischen Quadranten aus, welcher sich also zu jenem Kreisquadranten verhält, wie $\frac{c}{a}$ zu 1, oder wie c zu a. Daher verhält sich auch die Fläche der ganzen Ellipse, deren halbe große Axe $= a$, halbe kleine Axe $= c$ ist, zu der Fläche eines Kreises mit dem Halbmesser a, wie c zu a. Die Fläche dieses Kreises ist $= a^2 \pi$, und daher die Fläche der Ellipse $= ca\pi$. Diese Größe drückt aber wieder eine Kreisfläche aus, deren Halbmesser $= \sqrt{ac}$ ist, und daher sagt man auch, der Flächen-Inhalt einer Ellipse sey dem eines Kreises gleich, dessen Halbmesser die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen beiden Axen der Ellipse ist.

§. 157.

Ist $CA = a$, $AB = c$, $AP = x$ und $PM = y$, (Fig. 11.) so ist die Gleichung für die Hyperbel:

$$y = \frac{c}{a} \sqrt{(2ax + x^2)}$$

und daher

$$\int y \,\Delta x = \frac{c}{a} \int \sqrt{(2ax + x^2)}.$$

Entwickelt man die Radicalgröße nach dem binomischen Lehrsatze in eine Reihe, so kann man für die Fläche der Hyperbel einen Näherungs-Ausdruck erhalten.

Es sey AC = 1, AP = x, PM = y (Fig. 18.), der Coordinatenwinkel = CAG = φ, so ist jetzt die Gleichung für die Hyperbel:

$$y = \frac{1}{x},$$

folglich:

$$\int y \, \Delta x = \operatorname{Sin} \varphi \ \log. \text{nat.}\, x + \text{Const.}$$

Bei x = 1 mag die Fläche anfangen, also für diesen Werth von x, = 0 seyn, so ist auch Const. = 0. Die Flächenräume CBMP sind also die Logarithmen der dazu gehörenden Abscissen AP, und zwar solche Logarithmen, welche zu einem Systeme gehören, dessen Modul = Sin φ ist. Man wird daher natürliche Logarithmen erhalten, wenn Sin $\varphi = 1$, d. h. $\varphi = 90°$, also die Hyperbel gleichseitig ist. Diese Eigenschaft der Hyperbel hat bei den Logarithmen den Kunst-Ausdruck der hyperbolischen Logarithmen veranlaßt.

§. 158.

Ist r = QC (Fig. 19.) der Radius des erzeugenden Kreises, AP = x, PM = y, der Winkel MCQ = φ, so hat man für die Cykloide

$$y = r\,(1 - \operatorname{Cos}\varphi)$$
$$x = r\,(\varphi - \operatorname{Sin}\varphi).$$

Will man hieraus den Flächenraum darstellen, so ist es nicht gestattet, sein Differential durch $y \,\Delta x$ auszudrücken, denn x hängt hier noch von φ ab, und da man sich vermöge obiger Gleichungen diesen Winkel als Gelegenheit vorstellt, so hat man

$$\int y\, dx = \int r^2\, (1 - \operatorname{Cos}\varphi)^2\, \Delta\varphi$$
$$= r^2 \int (1 - 2 \operatorname{Cos}\varphi + \operatorname{Cos}\varphi^2)\, \Delta\varphi$$
$$= r^2\, (\varphi - 2 \operatorname{Sin}\varphi + \tfrac{1}{2} \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi) + C.$$

Für $\varphi = 0$ ist auch das Integral = 0, daher C = 0. Setzt man nun, um die Fläche der Cykloide zu erhalten, $\varphi = \pi$, so hat man die Fläche ABD = $r^2 \, \frac{3}{2}\, \pi$, also die

Fläche der ganzen Cykloide $= 3 r^2 \pi$, d. h. die Fläche der ganzen Cykloide ist dreimal so groß, als die des erzeugenden Kreises.

§. 159.

Für die logarithmische Linie (Fig. 20.) hat man die Gleichung:

$$y = e^{ax}$$

folglich ist die Fläche:

$$\int y \,\Delta x = \int e^{ax} \,\Delta x = \frac{1}{a} e^{ax} + C.$$

Für $x = 0$ mag die Fläche anfangen, d. h. das Integral für diesen Werth von x, $= 0$ seyn, so hat man:

$$0 = \frac{1}{a} + C, \; C = -\frac{1}{a} \text{ daher die Fläche}$$

$$\frac{1}{a}(y - 1).$$

Wenn der Anfangspunct in A, so ist die Ordinate daselbst $= AB = 1$, und wenn $AB = QM$ gemacht wird, so hat man $PQ = y - 1$. Nun ist $\frac{1}{a}$ die Subtangente $= PG$ für die Ordinate PM, und folglich ist der Flächenraum ABMP gleich dem Recht-Eck GKQP.

Nimmt man x negativ an, so hat man

$$y = \frac{1}{e^{ax}} \text{ und}$$

$$\int y \,\Delta x = \int e^{-ax} \,\Delta x$$

$$= -\frac{1}{a} e^{-ax} + \text{Const.}$$

für $x = 0$ ist auch das Integral $= 0$ also

$$0 = -\frac{1}{a} + C. \text{ und } C = \frac{1}{a}$$

daher ist die Fläche:

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{a} e^{-ax} = \frac{1}{a}(1 - y).$$

Je größer x wird, desto kleiner wird y, der Ausdruck nähert sich also immer mehr dem Werthe $\frac{1}{a}$, welchen er jedoch nicht erreichen kann.

§. 160.

Die Gleichung für die Cissoide ist:

$$y = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{(2r - x)}}$$

wobei r den Radius des erzeugenden Kreises bedeutet. Man hat daher:

$$\int y \Delta x = \int \frac{\sqrt{x^3}\,\Delta x}{\sqrt{(2r - x)}}$$

$$= \int \frac{x^2 \Delta x}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

$$= -\tfrac{1}{2} x \sqrt{(2rx - x^2)} + \frac{3r}{2} \int \frac{x \Delta x}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

$$= -\tfrac{1}{2} x \sqrt{(2rx - x^2)} - \frac{3r}{2} \sqrt{(2rx - x^2)} + \frac{3r^2}{2} \int \frac{\Delta x}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

$$= -(\tfrac{1}{2} x + \tfrac{3}{2} r) \sqrt{(2rx - x^2)} + \frac{3r^2}{2} \text{Arc. Sin. vers} \frac{x}{r} + C.$$

Für $x = 0$ (Fig. 21.) soll die Fläche anfangen zu fließen, also ist für diesen Werth das Integral $= 0$. Daher auch $C = 0$.

Für $x = r$ ist das Integral

$$= -2r^2 + \tfrac{3}{2} r^2 \tfrac{1}{2} \pi$$

$$= \tfrac{3}{4} \pi r^2 - 2r^2.$$

Für $x = 2r = AB$ erhält man den ganzen obern Theil der Cissoide $= ABH$

$$= \frac{3r^2 \pi}{2}$$

d. h. dreimal so groß, als die Fläche des Halbkreises, wodurch sie erzeugt wird, und folglich die Area zwischen beiden Zweigen dreimal so groß, als die Fläche jenes Kreises. Da jedoch die Ordinate für die Abscisse 2r eine Asymtote ist, so kann sich die Fläche diesem Ausdrucke nur nähern.

§. 161.

Die Gleichung für die Conchoide ist:

$$y = \frac{(b + x) \sqrt{(a^2 - x^2)}}{x}$$

Will man nun die Area BPM = s berechnen, so hat man

$$ds = -y \Delta x \text{ also:}$$

$$s = -\int \frac{(b+x)\sqrt{(a^2-x^2)}\,\Delta x}{x}$$

$$= -\int \frac{(b+x)(a^2-x^2)\,\Delta x}{x\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

$$= -\int \left(\frac{ba^2 - bx^2 + a^2x - x^3}{x\sqrt{(a^2-x^2)}}\right)\Delta x$$

$$= -\int \frac{ba^2 \Delta x}{x\sqrt{(a^2-x^2)}} + \int \frac{bx\Delta x}{\sqrt{(a^2-x^2)}} - a^2 \int \frac{\Delta x}{\sqrt{(a^2-x^2)}} + \int \frac{x^2 \Delta x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

$$= -\frac{a^2}{2} \text{Arc. Sin} \frac{x}{a} - b\sqrt{(a^2-x^2)} + \tfrac{1}{2} ab \log \frac{a+\sqrt{(a^2-x^2)}}{a-\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

$$- \tfrac{1}{2} x \sqrt{(a^2-x^2)} + \text{Const.}$$

Für $x = a = AB$ ist $s = o$, folglich

$$\text{Const.} = \tfrac{1}{4}\pi a^2. \text{ Also:}$$

$$s = \tfrac{1}{4} a^2 \pi - b\sqrt{(a^2-x^2)} - \tfrac{1}{2} x \sqrt{(a^2-x^2)} - \tfrac{1}{2} a^2 \text{Arc. Sin} \frac{x}{a}$$

$$+ \tfrac{1}{2} ab \log \frac{a+\sqrt{(a^2-x^2)}}{a-\sqrt{(a^2-x^2)}}.$$

§. 162.

Wenn das Gesetz, nach welchem die Fläche einer Curve fließt, bekannt ist, so muß es umgekehrt auch möglich seyn, das Ordinatengesetz daraus zu finden. Ist die Fläche s als Function der Abscisse gegeben,

$$s = \varphi(x),$$

so ist:

$$\int y \Delta x = \varphi(x)$$

$$y \Delta x = d\varphi(x) \text{ und}$$

$$y = \frac{d\varphi(x)}{\Delta x}.$$

Diese Operation ist also im Allgemeinen leicht, und die Aufgabe muß sich jedesmal lösen lassen, indem man von jeder gegebenen Function das erste Differentialverhältniß abzuleiten im Stande ist.

Z. B. Es sey die Curve zu finden, deren Flächengesetz durch die Gleichung

$$s = \frac{mx^2 + bx^3}{\sqrt{x}}$$

gegeben ist; so hat man:

$$y = \frac{\sqrt{x}.(2mx + 3bx^2) - \frac{1}{2}(mx^2 + bx^3)\frac{1}{\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{2mx^2 + 5bx^3 - \frac{1}{2}(mx^2 + bx^3)}{x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3mx^2 + 5bx^3}{2\sqrt{x^3}}$$

$$= \tfrac{3}{2}m\sqrt{x} + \tfrac{5}{2}b\sqrt{x^3}$$

Integrationen können nur dann vorkommen, wenn das Gesetz nicht durch eine entwickelte Function von x, sondern durch eine Differentialgleichung zwischen y und x gegeben ist. Soll z. B.

$$s = mxy \text{ seyn,}$$

so hat man

$$y = m\frac{d(x.y)}{\Delta x}$$

$$= mx\frac{dy}{\Delta x} + my$$

also

$$y(1 - m) = mx\frac{dy}{\Delta x}$$

$$dy = \frac{(1-m)y}{mx}\Delta x$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{1-m}{m}.\frac{\Delta x}{x}$$

$$\log y = \frac{1-m}{m}\log x = \log x^{\frac{1-m}{m}} \text{ und daher:}$$

$$y = bx^{\frac{1-m}{m}},$$

wobei b eine beliebige Constante bedeutet.

Dergleichen Aufgaben könnte man viele aufstellen, wobei man daher jedesmal auf Curven kömmt, welche alle quadrirbar sind.

Man kann Untersuchungen dieser Art, die umgekehrte Methode der Quadraturen nennen, eben so, wie man die Aufgaben, aus der Subtangente, Subnormale ꝛc. die Gleichung für die Curve zu finden, die umgekehrte Methode der Tangenten zu nennen pflegt.

Von der Rectification der Curven.

§. 163.

Wenn für eine beliebige Curve das Gesetz, wonach die Ordinaten fließen, d. h. das Ordinatengesetz, bekannt, oder durch eine Function der Abscisse gegeben ist; so ist auch die Länge der von dem Endpuncte der Ordinate beschriebenen Curve eine von der Abscisse als Gelegenheit zu fließen abhängende Fluente, deren Gesetz zu fließen, das Curvengesetz, von dem Ordinatengesetze abhängig seyn muß. Das Curvengesetz aus dem als bekannt vorauszusetzenden Ordinatengesetze ableiten, heißt die Curve **rectificiren**.

Die gesetzmäßige Linie, deren Länge mit Gleichförmigkeit fließt, oder für deren Länge, s, man die von der Abscisse x abhängende Function

$$s = a + bx$$

hat, kann nur eine grade Linie seyn, denn nur hier ist für jeden Werth BA und PM (Fig. 4.) der Abscisse:

$$\frac{BC}{BM} = \frac{BA}{BP},$$

die Zustände der Fluente, s, verhalten sich, wie die Gelegenheiten oder Abscissen.

Will man das b, welches das Bestreben ausdrückt, womit die Länge s der graden Linie fließt, construiren, so bemerke man, wenn der Coordinatenwinkel $MPR = \psi$ $BP = x$, $PM = y$ und $y = gx$ ist, daß man habe:

$$BC = s = Bq \operatorname{Sec} CBP = Bq. \operatorname{Sec} \varphi$$
$$= (x + y \operatorname{Cos} \psi) \operatorname{Sec} \varphi$$
$$= x (1 + g \operatorname{Cos} \psi) \operatorname{Sec} \varphi$$

Nun ist aber $g = \frac{\operatorname{Tang} \varphi}{\operatorname{Sin} \psi - \operatorname{Tang} \varphi \operatorname{Cos} \psi}$ (§. 126.) folglich

$$BC = x \left(1 + \frac{\operatorname{Tang} \varphi \operatorname{Cos} \psi}{\operatorname{Sin} \psi - \operatorname{Tang} \varphi \operatorname{Cos} \psi}\right) \operatorname{Sec} \varphi$$
$$= x \left(\frac{\operatorname{Sin} \psi}{\operatorname{Sin} \psi - \operatorname{Tang} \varphi \operatorname{Cos} \psi}\right) \operatorname{Sec} \varphi$$

Wenn man nun dieses BC oder s mit der Gelegenheit x vergleicht, so erhält man dadurch das Bestreben, womit die Länge der graden Linie fließt, d. h. den Werth von b

$$= \left(\frac{\operatorname{Sin}\psi}{\operatorname{Sin}\psi - \operatorname{Tang}\varphi \operatorname{Cos}\psi}\right) \operatorname{Sec}\varphi.$$

§. 164.

Lehrsatz.

Sollen zwei Curven, welche auf dieselbe Abscisse und denselben Anfangspunct bezogen, und für irgend einen Werth von x zu einem gleichen Zustande der Ordinate gekommen sind, in demselben ein gleiches Curven-Bestreben haben; so müssen sie daselbst auch ein gleiches Ordinaten-Bestreben besitzen, oder für diesen Zustand eine gemeinschaftliche Tangente haben.

Denn besitzt die Ordinate einer Curve in einem gewissen Zustande PM (Fig. 23.) ein größeres Bestreben zu fließen, (zu wachsen oder abzunehmen) als in einem anderen Zustande QR, oder umgekehrt; so hat der die Curve beschreibende Punct in M das Bestreben, sich weiter von seinem Orte zu entfernen, oder ein Bestreben, eine größere Bahn zu durchlaufen, als in R, oder umgekehrt, d. h. der beschreibende Punct hat in M ein größeres Bestreben, eine Curvenlänge zu beschreiben, oder ein größeres Curven-Bestreben, als in R, oder umgekehrt. Mit dem Ordinaten-Bestreben wächst und vermindert sich also auch das Curven-Bestreben.

Sollen daher zwei Curven QR und ST (Fig. 24.) in einem gleichen Ordinaten-Zustande PM ein gleiches Curven-Bestreben haben, so muß in diesem Zustande auch das Ordinaten-Bestreben beider gleich seyn, oder beide müssen in diesem Zustande eine gemeinschaftliche Berührende haben.

Wenn also das Ordinaten-Bestreben wächst, so wird auch das Curven-Bestreben immer größer, und umgekehrt. Fließt also die Ordinate mit Acceleration, so wird auch die Curvenlänge accelerirend fließen; fließt die Ordinate mit Retardation, so ist auch das Fließen der Curvenlänge retardirend.

Das Fließen der Curvenlänge einer convex wachsenden und concav abnehmenden Curve geschiehet also mit Acceleration, hingegen das einer concav wachsenden und convex abnehmenden Curve mit Retardation, das Fließen einer graden Linie endlich, wo also weder Concavität noch Convexität Statt findet, ist gleichförmig.

§. 165.

Lehrsatz.

Das Curven-Bestreben einer beliebigen krummen Linie ist für jeden Coordinatenwinkel der Tangente, dividirt durch die Subtangente gleich.

Zwei Linien KG und SM, (Fig. 24.) welche, auf einerlei Abscisse und denselben Anfangspunct A bezogen, für eine Abscisse AP zu einem gleichen Zustande PM gekommen seyn mögen, sollen von der Beschaffenheit seyn, daß die Länge der ersten stets mit Gleichförmigkeit, die der anderen aber mit Ungleichförmigkeit, gleichviel, ob mit Acceleration, oder mit Retardation fließe; so ist die erstere eine grade Linie, die andere hingegen eine beliebige Curve. Beide haben aber nach dem vorhergehenden Lehrsatze ein gleiches Ordinaten-Bestreben, d. h. die grade Linie ist für den gemeinschaftlichen Punct M die Berührende der Curve. Das Curven-Bestreben der ersteren, ist aber nach §. 163.

$$= \left(\frac{\operatorname{Sin}\psi}{\operatorname{Sin}\psi - \operatorname{Tang}\varphi \operatorname{Cos}\psi}\right) \operatorname{Sec}\varphi$$

wo ψ den Coordinatenwinkel, MPH, φ hingegen den Winkel MVP, d. h. den Winkel bedeutet, welchen die Berührende mit der Abscisse macht, und für dessen Tangente wir (§. 129.) den Ausdruck:

$$\frac{\frac{dy}{\Delta x} \operatorname{Sin}\psi}{1 + \frac{dy}{\Delta x} \operatorname{Cos}\psi}$$

fanden. Da nun dieses Bestreben nach der Voraussetzung mit dem Curven-Bestreben der Curve SMT einerlei ist; so hat man für dieses die Formel:

$$\frac{\mathrm{Sin}\,\psi\ \mathrm{Sec}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\psi - \dfrac{\frac{dy}{\Delta x}\,\mathrm{Sin}\,\psi\ \mathrm{Cos}\,\psi}{1 + \frac{dy}{\Delta x}\,\mathrm{Cos}\,\psi}}$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{dy}{\Delta x}\,\mathrm{Cos}\,\psi\right)\ \mathrm{Sec}\,\varphi}{1 + \frac{dy}{\Delta x}\,\mathrm{Cos}\,\psi - \frac{dy}{\Delta x}\,\mathrm{Cos}\,\psi}$$

$$= \left(1 + \frac{dy}{\Delta x}\,\mathrm{Cos}\,\psi\right)\ \mathrm{Sec}\,\varphi$$

$$= \left(1 + \frac{dy}{\Delta x}\,\mathrm{Cos}\,\psi\right).\ \sqrt{(1 + \mathrm{Tang}\,\varphi^2)}$$

$$= \sqrt{\left(\left(1 + \frac{dy}{\Delta x}\,\mathrm{Cos}\,\psi\right)^2 (1 + \mathrm{Tang}\,\varphi^2)\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\left(1 + \frac{dy}{\Delta x}\,\mathrm{Cos}\,\psi\right)^2 + \frac{dy^2}{\Delta x^2}\,\mathrm{Sin}\,\psi^2\right)}$$

$$= \sqrt{\left(1 + 2\frac{dy}{\Delta x}\,\mathrm{Cos}\,\psi + \frac{dy^2}{\Delta x^2}\right)}$$

Dieser Ausdruck giebt also für eine beliebige Curve die Größe des Curven-Bestrebens an, wenn der Coordinatenwinkel $= \psi$ ist, er ist gleich der Tangente dividirt durch die Subtangente. §. 133.

Hat man daher die Ordinatengleichung für irgend eine Curve

$$y = \varphi\,(x)$$

und will daraus die Gleichung für die Länge s der Curve, oder die Curvengleichung finden, so kann man sie einstweilen fingiren:

$$s = \chi\,(x).$$

Das Bestreben dieser Fluente, welches $= \frac{ds}{\Delta x}$ seyn muß, ist bekannt, man hat also

$$\frac{ds}{\Delta x} = \sqrt{\left(1 + 2\frac{dy}{\Delta x}\,\mathrm{Cos}\,\psi + \frac{dy^2}{\Delta x^2}\right)}$$

und daher:

$$s = \int \sqrt{\left(1 + 2\frac{dy}{\Delta x}\,\mathrm{Cos}\,\psi + \frac{dy^2}{\Delta x^2}\right)}\;\Delta x + \mathrm{Const.}$$

$$= \int \sqrt{(dy^2 + 2\,\mathrm{Cos}\,\psi\; dy\;\Delta x + \Delta x^2)}$$

als die verlangte Gleichung.

Ist der Coordinatenwinkel ein rechter, so ist $\mathrm{Cos}\,\psi = 0$, und also

$$s = \int \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2}\right)}\;\Delta x + C$$

$$+ \int \sqrt{(dy^2 + \Delta x^2)} + C.$$

§. 166.

Wenn die Gleichung für die Parabel unter rechtwinkeligen Coordinaten gegeben ist,

$$y = \sqrt{bx},$$

so hat man:

$$\frac{dy}{\Delta x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{x}}$$

und

$$s = \int \sqrt{\left(1 + \frac{b}{4x}\right)}\;\Delta x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(b + 4x)\,\Delta x}{\sqrt{(bx + 4x^2)}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(\frac{1}{2}b + 2x)\,\Delta x}{\sqrt{(\frac{1}{4}bx + x^2)}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(\frac{1}{4}b + 2x)\,\Delta x}{\sqrt{(\frac{1}{4}bx + x^2)}} + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{4}b\,\Delta x}{\sqrt{(\frac{1}{4}bx + x^2)}}$$

$$= \sqrt{(\tfrac{1}{4}bx + x^2)} + \tfrac{1}{4}b\log\frac{\sqrt{(\frac{1}{4}b + x)} + \sqrt{x}}{\frac{1}{2}\sqrt{b}} + C.$$

Für $x = 0$ mag die Länge der Parabel anfangen zu fließen, für diesen Werth von x ist daher $s = 0$. Man hat also:

$$0 = \tfrac{1}{4}b\log\frac{\sqrt{\frac{1}{4}b}}{\frac{1}{2}\sqrt{b}} + C.$$

daher $C = 0$.

§. 167.

Für die Neilische Parabel hat man die Ordinatengleichung:

$$y = \sqrt{b x^3}$$

daher:

$$\frac{dy}{\Delta x} = \tfrac{3}{2}\sqrt{bx}$$

$$s = \int \sqrt{(1 + \tfrac{9}{4} bx)}\, \Delta x$$

$$= \frac{8}{27b} \sqrt{(1 + \tfrac{9}{4} bx)^3} + \text{Const.}$$

Für $x = 0$ fange der Bogen an, also ist auch $s = 0$, daher

$$0 = \frac{8}{27b} + \text{Const.}, \ \text{Const.} = -\frac{8}{27b}$$

daher:

$$s = \frac{8}{27b} (\sqrt{(1 + \tfrac{9}{4} bx)} - 1)$$

Hat man allgemein:

$$y = bx^m,$$

wo m eine ganze oder gebrochene Zahl bedeuten kann, so findet man:

$$s = \int \sqrt{(1 + m^2 b^2 x^{2m-2})}\, \Delta x.$$

Dieser Ausdruck ist integrabel, wenn $\frac{1}{2m-2}$ oder auch $\frac{1}{2m-2} + \frac{1}{2}$ eine ganze Zahl ist, (§. 70.) woraus die Bedingungen hervorgehen, unter welchen die in der Gleichung $y = bx^m$ begriffenen Parabeln rectificabel sind. Bedeutet p eine ganze positive Zahl, so muß also entweder:

$$\frac{1}{2m-2} = p, \text{ oder } \frac{1}{2m-2} + \frac{1}{2} = p$$

d. h. entweder $m = \frac{1+2p}{2p}$ oder $m = \frac{2p}{2p-1}$

seyn. Setzt man also für p successiv die ganzen Zahlen: 1, 2, 3 u. s. w., so erhält man für m die Werthe: $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{6}$ u. s. w. oder: 2, $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{5}$ u. s. f., also sind die Parabeln:

$y = bx^{\frac{3}{2}}$, $y = bx^{\frac{5}{4}}$, $y = bx^{\frac{7}{6}}$ u. s. w. und
$y = bx^2$, $y = bx^{\frac{4}{3}}$, $y = bx^{\frac{6}{5}}$ u. s. f. rectificirbar.

§. 168.

Für den Kreis hat man die Gleichung aus dem Mittelpuncte:

$$y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$$

oder aus einem Puncte der Peripherie:

$$y = \sqrt{(2rx - x^2)}.$$

Im ersten Falle ist:

$$\frac{dy}{\Delta x} = -\frac{x}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$$

im zweiten Falle hingegen:

$$\frac{dy}{\Delta x} = -\frac{r - x}{\sqrt{(2rx - x^2)}},$$

daher:

$$s = \int \sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}\right)} \Delta x$$

$$= \int \sqrt{\left(\frac{r^2}{r^2 - x^2}\right)} \Delta x = r \int \frac{\Delta x}{\sqrt{(r^3 - x^2)}}$$

oder

$$s = \int \sqrt{\left(1 + \frac{(r - x)^2}{2rx - x^2}\right)} \Delta x$$

$$= \int \sqrt{\left(\frac{2rx - x^2 + r^2 - 2rx + x^2}{2rx - x^3}\right)} \Delta x$$

$$= r \int \frac{\Delta x}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

Entwickelt man die Ausdrücke, so erhält man den Kreisbogen näherungsweise.

Man nehme $r = 1$ an, so ist:

$$s = \int \frac{\Delta x}{\sqrt{(1 - x^2)}} = \text{Arc. Sin}\, x.$$

Nun ist:

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 \ldots + \frac{1.3..(2r-1)}{2.4..2r}x^{2r} \ldots$$

folglich

$$s = x + \tfrac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1.3..(2r-1)}{2.4..2r}\frac{x^{2r+1}}{2r+1} \ldots$$

Die Constante ist $= 0$, wenn für $x = 0$ auch $s = 0$ werden soll.

Da nun dieses dem Bogen gleich ist, der zum Sinus x hat, und alle Sinus zwischen 0 und 90° echte Brüche sind, so convergirt die Reihe. Z. B. ist $x = \frac{1}{2}$, also der Bogen $= 30^\circ$, so hat man für diesen Bogen die Reihe:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^3 . 3} + \frac{1 . 3}{2 . 4}\,\frac{1}{2^5 5} \dots + \frac{1 . 3 .. (2r-1)}{2 . 4 \dots 2r}\,\frac{1}{2^{2r+1}(2r+1)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{1280} + \frac{5}{14336} \dots$$

Will man die andere Formel für $r = 1$ zur Integration bringen, so hat man:

$$\int \frac{\Delta x}{\sqrt{(2x - x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log \frac{\sqrt{(2x - x^2)} + x\sqrt{-1}}{\sqrt{(2x - x^2)} - x\sqrt{-1}} + C.$$

$$= 2 \text{ Arc. Tang } \frac{x}{\sqrt{(2x - x^2)}} + C$$

Constante ist $= 0$.

Setzt man für $\frac{x}{\sqrt{(2x - x^2)}}$ den Werth 1, woraus $x = 1$ folgt, so hat man den Bogen von $45^\circ = \frac{1}{4}\pi$ (bei dem Halbmesser $= 1$), also

$$2 \text{ Arc. Tang } 1 = 2 \text{ Arc. } 45^\circ = \text{Arc. } 90^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}} \log \frac{1 + \sqrt{-1}}{1 - \sqrt{-1}} = \frac{1}{2}\pi.$$

Also:

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{-1}} \log \frac{1 + \sqrt{-1}}{1 - \sqrt{-1}}$$

wodurch also die Länge des Kreisbogens in geschlossener Form dargestellt wird.

§. 169.

Bedeutet a die halbe große, c die halbe kleine Axe der Ellipse, und wird der Anfangspunct in der Mitte der großen Axe angenommen, so hat man für diese Curve die Ordinatengleichung:

$$y = \frac{c}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

daher

$$\frac{dy}{\Delta x} = -\frac{c}{a} . \frac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

und

$$ds = \sqrt{\left(1 + \frac{c^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}\right)} \Delta x$$

$$= \frac{\sqrt{(a^2 (a^2 - x^2) + c^2 x^2)}\, \Delta x}{a \sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

$$= \frac{(\alpha^4 - (a^2 - c^2)\, x^2)}{\alpha \sqrt{(a^2 - x^2)}}\, \Delta x$$

$$= \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{a^2 - c^2}{a^4}\, x^2\right)}}{\sqrt{\left(- \frac{x^2}{a^2}\right)}}\, \Delta x.$$

Setzt man $\frac{a^2 - c^2}{a^2} = f^2$, so hat man:

$$ds = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{f^2}{a^2}\, x^2\right)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}}$$

Man kann diese Formel noch umformen, um sie zur Entwickelung in eine Reihe geschickter zu machen; denn nur auf diesem Wege ist man bis jetzt im Stande das Integral darzustellen. Diese Aufgabe findet ihre Anwendung vornehmlich in der Astronomie, und deshalb haben sich die Astronomen vielfältig bemühet, bequeme Ausdrücke für s zu erhalten.

§. 170.

Ist a die halbe große, c die halbe kleine Axe der Hyperbel, der Anfangspunct in der Mitte der großen Axe; so hat man für diese Curve die Gleichung:

$$y = \frac{c}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)}$$

$$\frac{dy}{\Delta x} = \frac{c\, x}{a \sqrt{(x^2 - a^2)}}$$

daher:

$$ds = \sqrt{\left(1 + \frac{c^2\, x^2}{a^2\, (x^2 - a^2)}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{(a^2 (x^2 - a^2) + c^2 x^2)}}{a \sqrt{(x^2 - a^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(- a^4 + (a^2 + c^2)\, x^2)}}{a \sqrt{(x^2 - a^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(- 1 + \frac{a^2 + c^7}{a^4}\, x^2\right)}}{\sqrt{\left(- 1 + \frac{x^2}{a^2}\right)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(\frac{f^2}{a^2}\ x^2 - 1)}}{\sqrt{(\frac{x^2}{a^2} - 1)}}$$

wenn man wieder für den Ausdruck $\frac{a^2 + c^2}{a^2}$ den Werth f^2 setzt. Auch hier kann die Integrande in eine Reihe entwickelt und dann zur Integration gebracht werden.

§. 171.

Für die Cykloide hat man:

$$y = r\,(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi)$$
$$x = r\,(\varphi - \mathrm{Sin}\,\varphi)$$

(Fig. 19.) also:

$$dy = r\,\mathrm{Sin}\,\varphi\ \triangle\varphi$$
$$dx = r\,(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi)\ \triangle\varphi$$

folglich:

$$ds = r\sqrt{(\mathrm{Sin}\,\varphi^2 + (1 - \mathrm{Cos}\,\varphi)^2)}\ \triangle\varphi$$
$$= r\sqrt{(\mathrm{Sin}\,\varphi^2 + 1 - 2\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Cos}\,\varphi^2)}\ \triangle\varphi$$
$$= r\sqrt{(2 - 2\,\mathrm{Cos}\,\varphi)}\ \triangle\varphi$$
$$= 2\,r\,(\frac{1 - \mathrm{Cos}\,\varphi}{2})\ \triangle\varphi$$
$$= 2\,r\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,\varphi\ \triangle\varphi.$$

Also ist:

$$s = 2r \int \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi\ \triangle\varphi = -4r\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi + C.$$

Um die Constante zu bestimmen, setze man $\varphi = 0$, woraus auch $s = 0$ folgt, daher hat man

$$0 = -4r + C \text{ also}$$
$$C = 4r.$$

Der Bogen s ist mithin

$$s = 4r\,(1 - \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi).$$

Setzt man für φ den Werth π, so erhält man die Hälfte der Cykloide $= 4r$, d. h. die halbe Cykloide ist vier mal so groß, als der Halbmesser des erzeugenden Kreises, also die ganze Cykloide vier mal so groß, als der Durchmesser desselben.

Da hier sowohl y, als x noch von φ abhängig ist, so war es nicht gestattet, für das Ordinaten-Bestreben $\frac{dy}{\Delta x}$, und für das Curven-Bestreben $\frac{ds}{\Delta x}$ zu setzen, sondern jenes ist $\frac{dy}{dx}$, dieses $= \frac{ds}{dx}$, und $ds = \sqrt{(1 + \frac{dy^2}{dx^2})} dx^2 = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

§. 172.

Für die logarithmische Linie ist:

$$y = e^x \text{ oder } x = \log. \text{ nat. } y,$$

daher:

$$\frac{dy}{\Delta x} = e^x = y$$

$$ds = \sqrt{(1 + y^2)}\ \Delta x = \frac{\sqrt{(1 + y^2)}\ dy}{y}$$

$$s = \int \frac{\sqrt{(1 + y^2)}\ dy}{y}$$

$$= \sqrt{(1 + y^2)} + \int \frac{dy}{y\sqrt{(1 + y^2)}}$$

$$= \sqrt{(1 + y^2)} + \log \frac{\sqrt{(1 + y^2)} - 1}{y} + C.$$

Für $x = 0$ ist $y = 1$, und s sey $= 0$, folglich

$$0 = \sqrt{2} + \log(\sqrt{(2)} - 1) + C$$

$$C = -\sqrt{2} - \log(-1 + \sqrt{2}).$$

§. 173.

So wie man aus der Ordinatengleichung die Curvengleichung ableiten kann, so muß man auch durch ein umgekehrtes Verfahren aus dieser jene finden. Man könnte ein solches Verfahren die umgekehrte Methode der Rectification nennen.

Es sey demnach

$$s = \varphi(x)$$

so hat man:

$$\frac{ds}{\Delta x} = \frac{d\varphi(\varphi)}{\Delta x} = \sqrt{(1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2})}$$

und also

$$\frac{dy}{\Delta x} = \sqrt{\left(\frac{d\varphi\,(x)^2}{\Delta x^2} - 1\right)}$$

$$y = \int \sqrt{\left(\frac{d\varphi\,(x)^2}{\Delta x^2} - 1\right)}\,\Delta x,$$

welches die gesuchte Ordinatengleichung ist.

Z. B. Man soll die Curve, d. h. ihre Ordinatengleichung, finden, deren Curvengleichung vom ersten Grade, also deren Curvengesetz gleichförmig ist. Das Curven-Bestreben ist alsdann constant, $= a$, man hat also:

$$\frac{ds}{\Delta x} = a$$

und:

$$y = \int \sqrt{(a^2 - 1)}\,\Delta x$$
$$= \sqrt{(a^2 - 1)}\,.\,x + C.$$

Daher ist auch die Ordinatengleichung vom ersten Grade, wie auch schon durch das Vorhergehende bekannt ist.

Sey ferner:

$$s = \tfrac{2}{3}\sqrt{(1 + x)^3}$$

so ist

$$\frac{ds}{\Delta x} = \sqrt{(1 + x)},$$

daher:

$$y = \int \sqrt{(x)}\,\Delta x = \tfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$$

Von der Krümmung der Curven.

§. 174.

Wenn eine Curve, **nachdem sie einen gewissen Bogen** $= h$ beschrieben hat, ihre Richtung mehr änderte, als eine andere, während sie einen gleichen Bogen beschrieb; so sagt man, der erste Bogen k r ü m m e sich mehr, als der andere. Die Größe der Krümmung eines Bogens AM (Fig. 25.) zeigt der Unterschied der anfänglichen Richtung in A und der zweiten in B, also der Winkel EAP — HMK = DFA. Wenn man in beiden Puncten A und M Normalen ziehet, so schließen diese bei ihrem Durchschnitte einen Winkel C ein, welcher = DFA, also der Krümmung des Bogens AM gleich ist.

Wenn der Bogen wächst, so ändert sich der Krümmungswinkel im Allgemeinen ungleichförmig, und nur dann mit Gleichförmigkeit, wenn die Curve ein Kreis ist, wie eine leichte Betrachtung zeigt. Man kann daher den Krümmungswinkel, oder die Krümmung z einer Curve als Fluente, deren Gelegenheit zu fließen die Bogenlänge s ist, ansehen, und sich das Gesetz dieser Fließenden durch eine Gleichung:

$$z = \varphi\,(s)$$

ausgedrückt vorstellen.

Damit man aller die Größen z und s mit einander vergleichen könne, so ist nöthig, daß man sich den Krümmungswinkel, z, durch einen ihm zugehörenden, mit dem Halbmesser = 1 beschriebenen Kreisbogen repräsentirt denke.

§. 175.

Um zuerst die gleichförmige Fluente dieser Art näher zu betrachten, stellen wir uns einen Kreis AME (Fig. 26.) vor, dessen Halbmesser CA = r ist. Um den Mittelpunct C sey noch mit dem Halbmesser = DC = 1 ein Kreis beschrieben, so ist nach dem Vorhergehenden der Winkel GFA, = MCA, die Krümmung des Bogens AM = s, welche durch den Bogen Dm = z vorgestellt wird. Nun ist aber

$$r \cdot z = s \text{ und also}$$

$$z = \frac{1}{r}\,s$$

als Gleichung für die gleichförmig fließende Krümmung des Kreisbogens. Das constante Bestreben, womit die Krümmung dieser Curven fließt, ist daher $= \frac{1}{r}$, d. h. 1 dividirt durch den Halbmesser.

§. 176.

Um bei einer beliebigen Curve die Gleichung zwischen der Krümmung und dem Bogen abzuleiten, kann man im Allgemeinen den Gang der Untersuchung beobachten, welcher §. 124. beschrieben ist, und welcher im Vorhergehenden öfter angewandt wurde. Man wird sich zwei Curven vorstellen, die eine davon beliebig annehmen, für die andere aber eine solche setzen, bei welcher man das Gesetz der Krümmung schon kennt, also z. B. die, welche gleichförmige Krümmung hat, oder den Kreis. Man wird ferner annehmen, daß beide Curven in einem gemeinschaftlichen Puncte ein gleiches Bestreben sich zu krümmen haben, welches das erste Differentialverhältniß aus der fingirten Gleichung zwischen der Krümmung und dem Bogen seyn muß. Hat man darauf die Bedingungen gefunden, unter welchen das Angenommene Statt haben kann, und also das Differentialverhältniß wirklich berechnet; so kann man durch Integration zu der gefoderten Gleichung gelangen. Allein man hat hier dieses Mittel nicht nöthig, die verlangte Gleichung zwischen z und s bietet sich auch ursprünglich dar.

Die Krümmung des Bogens Mm (Fig. 25.) ist der Winkel FDP — EBP. Der Winkel EBP ist constant, und man findet seine Tangente = a, wenn man in das erste Differentialverhältniß für x den Werth AP setzt. Der Winkel FDP hingegen ist durch seine Tangente $= \frac{dy}{\Delta x}$ gegeben, welche also veränderlich ist. Hat man daher:

$$z = FDP - EBP,$$

so ist

$$\text{Tang } z = \frac{\text{Tang } FDP - \text{Tang } EBP}{1 + \text{Tang } FDP.\ \text{Tang } EBP}$$

$$= \frac{\frac{dy}{\Delta x} - a}{1 + a\frac{dy}{\Delta x}}$$

daher:

$$z = \text{Arc. Tang } \frac{\frac{dy}{\Delta x} - a}{1 + a\frac{dy}{\Delta x}}$$

welches die gefoderte Gleichung ist.

§. 177.

Lehrsatz.

So lange die Curve vom Anfange an mit Concavität fließt, so lange ist die Krümmung mit y widerstreitend, so lange sie hingegen vom Anfange an mit Convexität fließt, so lange ist die Größe der Krümmung mit y, oder der Ordinate einstimmig.

Ist a mit y einstimmig, d. h. hat die Curve anfänglich das Bestreben zu wachsen, so wird, so lange dieses fortdauert, d. h. so lange $\frac{dy}{\Delta x}$ mit a einstimmig bleibt, der Nenner der Tangente von z, nämlich $1 + a \frac{dy}{\Delta x}$, positiv seyn, also auf das Zeichen der Tangente keinen Einfluß haben.

Wenn nun $\frac{dy}{\Delta x}$ zunimmt, d. h. wenn die Curve mit Convexität wächst, so ist, so lange dieses der Fall ist, $\frac{dy}{\Delta x} - a$, also auch die Tangente von z mit y einstimmig, und wird wachsen, bis $\frac{dy}{\Delta x}$ aufhört, vergleichbar zu seyn, in welchem Falle $z = \text{Arc. Tang} \frac{1}{a} = \text{Arc. Cot. } a$ ist, d. h. wenn die anfängliche Richtung der Curve der Winkel φ war, dessen Tangente wir a nannten, so hat sich z dem Werthe $90^\circ - \varphi$ so viel genähert, als man wollte, obgleich dieser Zustand von dieser Fluente nie erreicht werden kann. Da also die Krümmung z zwischen 0° und $90^\circ - \varphi$ bleibt, und die Tangente desselben mit y einstimmig ist, so ist auch z mit y einstimmig. Wenn aber $\frac{dy}{\Delta x}$ abnimmt, d. h. wenn die Curve mit Concavität wächst, so ist die Tangente von z, d. h. $\dfrac{\frac{dy}{\Delta x} - a}{1 + a \frac{dy}{\Delta x}}$ mit y widerstreitend, und da hier $\frac{dy}{\Delta x}$ bis zu 0 abnehmen kann, so ist in diesem Falle $z = \text{Arc. tang}(-a)$, woraus klar ist, daß z bei dieser Bedingung höchstens $= -\varphi$ geworden seyn kann. Da nun φ zwischen 0° und 90° liegen muß, und die Tangente von z mit y widerstreitend ist, so ist auch z mit y widerstreitend.

Ist aber a mit y widerstreitend, d. h. sollte die Curve anfänglich das Bestreben haben, abzunehmen, so wird, so lange dieses der Fall ist, d. h. so lange $\frac{dy}{\Delta x}$ mit a einstimmig bleibt, wieder wie oben der Nenner von Tang z positiv bleiben, also auf das Zeichen der Tangente keinen Einfluß behaupten. Wenn nun $\frac{dy}{\Delta x}$ wächst, d. h. wenn die Curve concav abnimmt, so wird Tang z mit y widerstreitend, und da ferner Tang z, wenn $\frac{dy}{\Delta x}$ auch noch so groß wird, den Werth $\frac{1}{a}$ nicht übersteigen kann, so, daß die Krümmung nicht größer, als $90^\circ - \varphi$ wird, wenn $\varphi =$ Arc. Tang a ist; so folgt, daß auch z mit y widerstreitend seyn muß. Wenn $\frac{dy}{\Delta x}$ abnimmt, d. h. wenn die Curve mit Convexität abnimmt, so ist Tang z mit y einstimmig, woraus, wie oben folgt, daß auch z mit y einstimmig ist.

Die Curve mag also wachsen, oder abnehmen, so lange sie concav ist, muß die Krümmung mit y widerstreitend seyn, so lange sie aber mit Convexität fließt, einstimmig.

Ist der Winkel, welchen die Berührende der Curve im Anfangspuncte mit der Abscisse macht, ein rechter, so ist die Krümmung:

$$z = \text{Arc. Cot.} \left(-\frac{dy}{}\right) = \text{Arc. Tang} \left(-\frac{\Delta x}{dy}\right).$$

§. 178.

Für die Parabel hat man das Ordinatengesetz:

$$y = \sqrt{bx},$$

also das Gesetz, wonach die Krümmung fließt, oder das Krümmungsgesetz

$$z = \text{Arc. Tang} \left(-2\sqrt{\frac{x}{b}}\right).$$

Da hier x jeden beliebigen mit b einstimmigen Werth annehmen kann, so wächst also die Tangente von o bis zu jeden gedenkbar großen Zustande, der dazu gehörende Bogen, oder die Krümmung z wächst daher von 0° bis zu jedem beliebig nahen Zustande an 90°, welchen sie aber nie ganz erreichen kann.

Das Ordinatengesetz für die Ellipse ist:

$$y = \sqrt{\left(bx - \frac{b}{a} x^2\right)},$$

daher

$$\frac{dy}{\Delta x} = \frac{b - 2\frac{b}{a}x}{2\sqrt{(bx - \frac{b}{a}x^2)}} = \frac{b\,(a - 2x)}{2\,a\sqrt{(bx - \frac{b}{a}x^2)}}$$

daher ist das Krümmungsgesetz:

$$z = \text{Arc. Tang}\left(-\frac{2\,a\sqrt{(bx - \frac{b}{a}x^2)}}{b\,(a - 2x)}\right)$$

Für $x = \frac{1}{2}a$ ist

$$z = \text{Arc. Tang}\,\frac{a\sqrt{ab}}{0},$$

also:

$$z = 90^\circ.$$

Für $x = a$ ist

$$z = \text{Arc. Tang}\ 0$$

und

$$z = 180^\circ.$$

Dasselbe findet mit dem negativen Theile der Ellipse Statt, so, daß sich also diese Curve in Allem um 360° krümmt.

§. 179.

Wichtiger ist die Untersuchung über das Bestreben, womit sich eine Curve in einem gewissen Zustande krümmen will, welches wir das Krümmungsbestreben nennen wollen.

Da die Krümmung einer Curve eine von dem Bogen, als Gelegenheit zu fließen, abhängige Fluente ist, so ist der Ausdruck für das Krümmungsbestreben $= \frac{dz}{\Delta s}$, oder, wenn der Bogen s als von x abhängig betrachtet wird, $= \frac{dz}{ds}$. Man kann also zu dem Ausdrucke des Krümmungsbestrebens durch Differentiation gelangen.

Man hat:

$$z = \text{Arc. Tang}\,\frac{\frac{dy}{\Delta x} - a}{1 + a\frac{dy}{\Delta x}}$$

also:

$$dz = \frac{(1 + a\frac{dy}{\Delta x})\, d(\frac{dy}{\Delta x}) - a(\frac{dy}{\Delta x} - a)\, d(\frac{dy}{\Delta x})}{(1 + a\frac{dy}{\Delta x})^2 \left(1 + \left[\frac{\frac{dy}{\Delta x} - a}{1 + a\frac{dy}{\Delta x}}\right]^2\right)}$$

$$= \frac{d(\frac{dy}{\Delta x}) + a^2\, d(\frac{dy}{\Delta x})}{(1 + a\frac{dy}{\Delta x})^2 \left(\frac{(1 + a\frac{dy}{\Delta x})^2 + (\frac{dy}{\Delta x} - a)^2}{(1 + a\frac{dy}{\Delta x})^2}\right)}$$

$$= \frac{(1 + a^2)\, d(\frac{dy}{\Delta x})}{(1 + a\frac{dy}{\Delta x})^2 + (\frac{dy}{\Delta x} - a)^2}$$

$$= \frac{(1 + a^2)\, d(\frac{dy}{\Delta x})}{1 + a^2 + (1 + a^2)(\frac{dy}{\Delta x})^2}$$

$$= \frac{(1 + a^2)\, d(\frac{dy}{\Delta x})}{(1 + a^2)(1 + (\frac{dy}{\Delta x})^2)}$$

$$= \frac{d(\frac{dy}{\Delta x})}{1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2}} = \frac{\frac{dy}{\Delta x}}{1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2}}$$

daher

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{\Delta x}}{(1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2}) \cdot \sqrt{(1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2})}\, \Delta x}$$

$$= \frac{\frac{d^2y}{\Delta x^2}}{\sqrt{(1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2})^3}},$$

welches der allgemeine Ausdruck für das Krümmungsbe=

streben einer beliebigen Curve in irgend einem beliebigen Zustande ist.

Ist der Winkel, welchen die Berührende mit der Abscisse im Anfangspuncte macht, ein rechter, so, daß man also für die Krümmung die Gleichung:

$$z = \text{Arc. Tang}\left(-\frac{\Delta x}{dy}\right) = \text{Arc. Cot}\left(-\frac{dy}{\Delta x}\right)$$

hat, so findet man auch hier

$$dz = \frac{\frac{d^2y}{\Delta x}}{\left(1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2}\right)}, \text{ also}$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{\Delta x^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2}\right)^3}}.$$

§. 180.

Vermöge des Ausdrucks des Krümmungsbestrebens kann man nun auch untersuchen, für welchen Werth der Abscisse die Krümmung ein Maximum oder Minimum erreicht. In der That, setzt man $\frac{dz}{ds} = 0$, so erhält man $\frac{d^2y}{\Delta x^2} = 0$. Ein solcher Werth findet daher Statt, wenn sich die Curve in einem Wendungspuncte befindet.

Ob aber dieser Werth ein Maximum, oder ein Minimum sey, findet sich aus den höheren Differential-Verhältnissen von z, wobei jedoch zu bemerken ist, daß das zweite Differential-Verhältniß nicht $\frac{d^2z}{ds^2}$, sondern $= \frac{ds\, d^2z - dz\, d^2s}{ds^2}$ ist.

§. 181.

Auf ähnliche Weise kann man auch untersuchen, wo eine Curve das größeste oder kleinste Bestreben habe, sich zu krümmen.

Z. B. Für die Parabel ist $y = \sqrt{bx}$, $\frac{dy}{\Delta x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{x}}$, $\frac{d^2y}{\Delta x^2} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{b}{x^3}}$, also das Krümmungsbestreben:

$$= \frac{-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{b}{x^3}}}{\sqrt{(1+\frac{1}{4}\frac{b}{x})^3}} = -\tfrac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{b}{(x+\frac{1}{4}b)^3}\right)}$$

$$= -2\sqrt{\left(\frac{b}{(b+4x)^3}\right)}.$$

Je größer x wird, desto kleiner wird das Krümmungsbestreben der Parabel, und es ist für $x = 0$ am größesten. Im Scheitelpuncte ist also die Parabel am meisten bestrebt, sich zu krümmen.

Für die Ellipse hat man, wenn die große Axe als Abscissenrichtung, der Mittelpunct als Anfangspunct angenommen wird, die Gleichung:

$$y = \frac{c}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

wo a die halbe große, c die halbe kleine Axe bedeutet. Daher ist:

$$\frac{dy}{\Delta x} = \frac{-\frac{c}{a}x}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = -\frac{c^2 x}{a^2 y}$$

$$\frac{d^2y}{\Delta x^2} = -\frac{c^2}{a^2}\left(\frac{y - x\frac{dy}{\Delta x}}{y^2}\right)$$

$$= -\frac{c^2}{a^2}\left(\frac{y + \frac{c^2x^2}{a^2y}}{y^2}\right)$$

$$= -\frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a^2y^2 + c^2x^2}{a^2y^3}\right).$$

Da nun aber:

$$y = \frac{c}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

also

$$ay = c\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

und

$$a^2y^2 = c^2a^2 - c^2x^2,$$

d. h.

$$c^2a^2 = a^2y^2 + c^2x^2,$$

so hat man:

$$\frac{d^2 y}{\Delta x^2} = - \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{c^2\ a^2}{a^2\ y^3} = - \frac{c^4}{a^2\ y^3}.$$

Um also für die Ellipse das Krümmungsbestreben zu finden, substituire man diesen Werth, so erhält man:

$$- \frac{\frac{c^4}{a^2\ y^3}}{\sqrt{(1 + \frac{c^4\ x^2}{c^2\ a^4 - c^2\ a^2\ x^2})^3}}$$

$$= - \frac{\frac{c^4}{a^2\ y^3}(c^2\ a^4 - c^2\ a^2\ x^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(c^2 a^4 - c^2 a^2 x^2 + c^4\ x^2)^3}}$$

$$= - \frac{\frac{c^4}{a^2\ y^3} \cdot (a^4\ y^2)^{\frac{3}{2}}}{c^3 \sqrt{(a^4 - (a^2 - c^2)\ x^2)^3}}$$

$$= - \frac{c\ a^4}{\sqrt{(a^4 - (a^2 - c^2)\ x^2)^3}}$$

Aus dieser Formel ist aber klar, daß das Krümmungsbestreben der Ellipse am geringsten seyn werde, wenn $x = 0$ ist, wo man es $= - \frac{c}{a^2}$ findet. Nimmt x seinen größesten Werth an, d. h. wird $x = \mp a =$ der halben großen Axe, so ist das Krümmungsbestreben am größesten, $= - \frac{a}{c^2}$.

Setzt man endlich in obigen Ausdruck für das Krümmungsbestreben der Ellipse $c = a = r$, so erhält man den des Kreises, $= \frac{r^5}{r^6} = \frac{1}{r}$, wie auch schon aus dem Vorhergehenden bekannt ist.

§. 182.

Lehrsatz.

Ein Kreis, welcher eine Curve im zweiten Grade berührt, hat mit der Curve an dem Berührungspuncte ein gleiches Krümmungsbestreben.

Betrachtet man das Bestreben, t, mit welchem sich eine gewisse Curve in einem Zustande krümmen will, so, daß man hat:

$$t = \frac{\frac{d^2 y}{\Delta x^2}}{\sqrt{(1 + \frac{d y^2}{\Delta x^2})^3}}$$

und man frägt nach einem Kreise, dessen constantes Bestreben, sich zu krümmen, diesem gleich ist; so hat man, wenn sein Radius = r gesetzt wird:

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2 y}{\Delta x^2}}{\sqrt{(1 + \frac{d y^2}{\Delta x^2})^3}}$$

also

$$r = \frac{\sqrt{(1 + \frac{d y^2}{\Delta x^2})^3}}{\frac{d^2 y}{\Delta x^2}}.$$

Nun lehren aber frühere Betrachtungen, daß der Radius des Kreises, welcher die Curve im zweiten Grade berührt, denselben Ausdruck für seine Größe habe, woraus obiger Satz bewiesen ist.

Anmerk. Man pflegt diesen Satz gewöhnlich umgekehrt abzuleiten, indem man sagt, ein Kreis, welcher sich so genau an eine Curve anschließt, muß gleiche Krümmung mit der Curve haben, wodurch man denn, gar keine Definition von dem, was man eigentlich unter Krümmung zu verstehen hat, gebend, hiermit schon bei der Theorie der Berührungen fertig ist. Abgesehen davon, daß es falsch ist, wenn man sagt, jener Kreis habe gleiche Krümmung mit der Curve, da er mit derselben in jenem Puncte nur ein gleiches Krümmungsbestreben hat, so bleibt doch bei solcher Ableitung das eigentliche Wesen dessen, was wir Krümmung nennen, durchaus im Dunkeln.

Da der Kreis, welcher eine Curve in einem gewissen Zustande im zweiten Grade berührt, dasselbe Krümmungs-

Bestreben hat, so pflegt man ihn den **Krümmungskreis**, und den Halbmesser desselben den **Krümmungshalbmesser** zu nennen. Dieser ist also dem umgekehrten Ausdrucke für das Krümmungsbestreben gleich.

Von den Evoluten und Evolventen.

§. 183.

Es sey eine krumme Linie mM (Fig. 28.) gegeben, man stelle sich vor, es sey auf dieselbe ein biegsamer unausdehnbarer Faden ohne Dicke, also eine biegsame mathematische Linie gelegt, welche in m nach der Richtung der Berührenden gespannt ist. Es werde nun dieser Faden von der Curve mM so abgewickelt, daß er immer in der gehörigen Spannung bleibe, also an jeder Stelle m und M die Richtung der Tangente annimmt, so beschreibt der Endpunct B dieser Linie eine Curve BN, und man nennt mM die **abgewickelte Curve** von BN, oder die **Evolute** derselben, (Evoluta), die Curve BN aber **die durch Abwickelung entstandene**, (evolutione genita) oder die **Abwickelnde, Evolvente**.

§. 184.

Lehrsatz.

Die Linie MN ist der Lage und Größe nach, der Krümmungshalbmesser für den Punct N der Evolvente.

Die Linie NM hat nämlich in jedem Zustande das Bestreben, um M als Mittelpunct einen Kreis mit dem Halbmesser MN zu beschreiben, so, daß der Punct N also das Bestreben hat, sich rechtwinkelig von der Richtung NM zu entfernen, folglich NM Normale der Evolvente in N ist, und sie ertheilt daher der Curve BN im Puncte N ein Bestreben, sich eben so zu krümmen, wie ein mit NM beschriebener Kreis. Die Evolvente hat also in N ein Krümmungsbestreben $= \frac{1}{NM}$, oder die Linie NM ist der Größe nach dem Krümmungshalbmesser der Evolvente für den Punct N gleich, und da auch NM rechtwinkelig auf der Curve in N, oder der Berührenden daselbst, stehet, so ist NM sowohl der Lage als der Größe nach der Krümmungshalbmesser der Evolvente in N.

§. 185.

Die Evolute ist also der geometrische Ort der Mittelpuncte aller Krümmungskreise der Evolvente, und ihre Halbmesser berühren daher die Evolute, während sie auf der Evolvente senkrecht stehen.

Ist die Gleichung der Evolvente gegeben, $AQ = x$, $QN = y$, so kann man daraus die der Evolute finden. Nennt man $AP = v$, $PM = z$ so hat man nach §. 149:

$$v = x - \frac{\left(\frac{dy}{\Delta x}\right)^3 + \frac{dy}{\Delta x}}{\frac{d^2y}{\Delta x^2}}$$

$$z = y + \frac{1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2}}{\frac{d^2y}{\Delta x^2}}$$

Da nun noch y als Function von x gegeben ist, so kann man aus diesen Gleichungen x und y eliminiren, und erhält dadurch eine Gleichung zwischen z und v, d. h. die Gleichung für die Evolute.

Hierzu ist natürlich nur das directe Verfahren der Differentiation erfoderlich, während die umgekehrte Aufgabe, aus der Gleichung der Evolute die der Evolvente zu finden, nur durch Integration zur Lösung gebracht werden kann. Ist z als Function von v gegeben, oder hat man

$$z = \varphi\,(u)$$

und substituirt in diese Gleichung für z und u ihre Werthe, so erhält man:

$$y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{\Delta x}\right)^2}{\frac{d^2y}{\Delta x^2}} = \varphi\left(x - \frac{\left(\frac{dy}{\Delta x}\right)^3 + \frac{dy}{\Delta x}}{\frac{d^2y}{\Delta x^2}}\right)$$

eine Gleichung zwischen x, y $\frac{dy}{\Delta x}$ und $\frac{d^2y}{\Delta x^2}$, aus welcher man noch die Gleichung zwischen x und y selbst herzuleiten hat.

§. 186.

Will man z. B. die Evolute der gemeinen Parabel finden, so hat man hier:

$$y = \sqrt{bx},\ \frac{dy}{\Delta x} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{x}},\ \frac{d^2y}{\Delta x^2} = -\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{b}{x^3}}$$

daher die Ordinate der Evolute:

$$x = \sqrt{bx} + \frac{1 + \frac{1}{4}\frac{b}{x}}{-\frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{b}{x^3}\right)}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}\frac{b}{x} + 1 + \frac{1}{4}\frac{b}{x}}{-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{b}{x^3}}} = -4\sqrt{\frac{x^3}{b}}$$

die Abscisse für dieselbe:

$$v = x - \frac{\frac{1}{8}\sqrt{\frac{b^3}{x^3}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{x}}}{-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{b}{x^3}}}$$

$$= x + \tfrac{1}{2}b + 2x = \tfrac{1}{2}b + 3x.$$

Hieraus findet man umgekehrt:

$$x = \frac{v - \frac{1}{2}b}{3}.$$

Wird dieser Werth von x in die Gleichung für z substituirt, so erhält man:

$$z = -4\sqrt{\left(\frac{1}{27}\frac{(v-\frac{1}{2}b)^3}{b}\right)}$$

$$= -\sqrt{\frac{16}{27b}}\,(v - \tfrac{1}{2}b)^3.$$

Ist v kleiner, als $\frac{1}{2}$ b, so giebt es keine reelle Ordinaten für die Evolute, für v $= \frac{1}{2}$ b ist z $= 0$, und hier beginnt daher die Curve. Macht man AB (Fig 29.) $= \frac{1}{2}$ b gleich der doppelten Brennweite, und versetzt den Anfangspunct der Abscissen für die Evolute in B, so ist ihre Gleichung

$$z = -\sqrt{\frac{16}{27b}}\, v^3.$$

Dieses ist die Gleichung der Neilischen Parabel, welche daher die Evolute der Apollonischen Parabel ist. Die Ordinate qr der Evolute, welche einer positiven Ordinate PM der Parabel entspricht, ist negativ, liegt also unterhalb der Abscissenlinie, hingegen ist die zu einer negativen Ordinate Pm der Parabel gehörende Ordinate der Evolute, positiv, wie aus der Gleichung folgt.

§. 187.

Für die Cykloide hat man:

$$y = r\,(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi)$$
$$x = r\,(\varphi - \mathrm{Sin}\,\varphi),$$

daher ist:

$$dy = r\,\mathrm{Sin}\,\varphi\ \Delta\varphi$$

und

$$dx = r\,(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi)\ \Delta\varphi.$$

Ferner ist:

$$d^2y = r\,\mathrm{Cos}\,\varphi\ \Delta\varphi^2,$$
$$d^2x = r\,\mathrm{Sin}\,\varphi\ \Delta\varphi^2.$$

Also hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{1 - \mathrm{Cos}\,\varphi} = \mathrm{Cot.}\,\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\,\mathrm{Cot.}\,\frac{1}{2}\varphi}{r\,(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi)\ \Delta\varphi}$$

$$= -\frac{\frac{1}{2}\Delta\varphi}{r\,(\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\varphi)^2\,(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi)\ \Delta\varphi}$$

$$= -\frac{1}{2r\,(\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\varphi)^2\ 2\,(\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\varphi)^2}$$

$$= -\frac{1}{4r\,(\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\varphi)^4} = -\frac{1}{4r}\,(\mathrm{Cosec}\,\tfrac{1}{2}\varphi)^4.$$

Setzt man diese Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}$ in die Formeln für z und v, so erhält man:

$$z = r(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi) + \frac{1 + (\mathrm{Cot}.\,\frac{1}{2}\varphi)^2}{-\frac{1}{4r}(\mathrm{Cosec}.\,\frac{1}{4}\varphi)^2}$$

Nun ist aber $(\mathrm{Cot}.\,\frac{1}{2}\varphi)^2 = \frac{1 + \mathrm{Cos}\,\varphi}{1 - \mathrm{Cos}\,\varphi}$

und

$$(\mathrm{Cosec}.\,\tfrac{1}{2}\varphi)^4 = \frac{1}{(\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\varphi)^4} = \left(\frac{2}{1 - \mathrm{Cos}\,\varphi}\right)^2,$$

also:

$$z = r(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi) - \frac{1 + \frac{1 + \mathrm{Cos}\,\varphi}{1 - \mathrm{Cos}\,\varphi}}{\frac{1}{4r}\left(\frac{2}{1 - \mathrm{Cos}\,\varphi}\right)^2}$$

$$= r(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi) - r(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi)^2 - (1 + \mathrm{Cos}\,\varphi)(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi)$$
$$= r - r\,\mathrm{Cos}\,\varphi - r + 2r\,\mathrm{Cos}\,\varphi - r\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - r(1 - \mathrm{Cos}\,\varphi^2)$$
$$= r\,\mathrm{Cos}\,\varphi - r\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - r\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2 = r\,\mathrm{Cos}\,\varphi - r$$
$$= -(r - r\,\mathrm{Cos}\,\varphi).$$

Ferner erhält man:

$$v = x + \frac{(\mathrm{Cot}.\,\frac{1}{2}\varphi)^3 + \mathrm{Cot}\,\frac{1}{2}\varphi}{\frac{1}{4r}(\mathrm{Cosec}.\,\frac{1}{2}\varphi)^4}$$
$$= x + 4r(\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi)^4\,[(\mathrm{Cot}\,\tfrac{1}{2}\varphi)^3 + \mathrm{Cot}\,\tfrac{1}{2}\varphi]$$
$$= x + 4r[\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi.\ \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,(\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi)^2 + \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi\ \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,(\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi)^2]$$
$$= x + 4r\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\varphi\ \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi = x + 4r\sqrt{\left(\frac{1 - \mathrm{Cos}\,\varphi^2}{4}\right)}$$
$$= x + 2r\,\mathrm{Sin}\,\varphi = r(\varphi - \mathrm{Sin}\,\varphi) + 2r\,\mathrm{Sin}\,\varphi$$
$$= r(\varphi + \mathrm{Sin}\,\varphi).$$

Man hat daher:

$$z = -(r - r\,\mathrm{Cos}\,\varphi) \text{ und}$$
$$v = r\varphi + r\,\mathrm{Sin}\,\varphi.$$

Hieraus ist schon deutlich zu ersehen, daß die Evolute der Cykloide gleichfalls eine Cykloide sey, welcher derselbe Halbmesser des erzeugenden Kreises zum Grunde liegt, als ihrer Evolvente. Die Ordinate QR (Fig. 30.) der Evolute, welche der Ordinate PM der Evolvente entspricht, liegt in Beziehung auf PM auf der entgegengesetzten Seite, und ist der ihr correspondirenden Ordinate der Evolvente der Größe nach gleich, wie aus dem Ausdrucke $z = -(r - r \operatorname{Cos}\varphi) = -y$ folgt. Für die Evolute ist AQ die Abscisse v, QR die Ordinate z; will man aber $ap = DQ$ als Abscisse t, pR als Ordinate s annehmen, so hat man:

$$QD = AD - AQ \text{ oder } t = r\pi - v,$$

ferner:

$$pR = aD - RQ.$$

Nun ist aber $aD = DE = 2r$, denn da $PM = QR$ ist, so ist auch $MT = TR$, d. h. für jeden Punct M, also auch für E, ist die Normale dem halben Krümmungshalbmesser gleich, also ist auch $ED = \frac{1}{2}\, aE$ oder $aD = DE = 2r$. Daher hat man:

$$pR = s = 2r - z.$$

Setzt man also in die Ausdrücke von s und t für z und v ihre absoluten Werthe, so erhält man:

$$s = 2r - r + r\operatorname{Cos}\varphi = r + r\operatorname{Cos}\varphi$$
$$t = r\pi - r\varphi - r\operatorname{Sin}\varphi = r(\pi - \varphi) - r\operatorname{Sin}\varphi.$$

Jetzt ist aber a der Anfangspunct, ap die Abscisse, pR die Ordinate. Den Ausdrücken liegt aber noch der Winkel φ zum Grunde, setzt man dafür $\pi - \varphi = \psi$ an die Stelle, so erhält man

$$s = r - r\operatorname{Cos}(\pi - \varphi) = r - r\operatorname{Cos}\psi$$
$$t = r(\pi - \varphi) - r\operatorname{Sin}(\pi - \varphi) = r\psi - r\operatorname{Sin}\psi,$$

und dieses sind wieder dieselben anfänglichen Gleichungen für die Cykloide.

Hätte man daher zwei Cykloiden aA und aK construirt, befestiget in a einen biegsamen und unausdehnbaren Faden, welchen man auf den einen Theil aA aufwickelt; so beschreibt der Endpunct des jetzt auf A liegenden Fadens bei der Abwickelung die gleiche Cykloide AE, und bei der Aufwickelung auf aK die andere congruente Hälfte EK.

§. 188.

Nimmt man den Bogen s der Evolute von m an (Fig. 28.) und setzt $mB = a$, so ist natürlich der Bogen mM der Evolute und die Linie Bm, der graden Linie MN gleich, d. h. man hat $s + a = MN =$ dem Krümmungshalbmesser der Evolvente.

Ferner ist die Tangente des Winkels, den die Berührende der Evolvente mit der Abscisse macht, der Cotangente des Winkels gleich, welchen die Normale NM oder die Berührende der Evolute mit der Abscisse formirt. Ist daher die Gleichung für die Evolute: $y = \varphi(x)$ die der Evolvente $z = \psi(u)$, so ist das Differentialverhältniß der einen Function dem umgekehrten Differentialverhältniß der andern gleich. Da aber, wenn die Evolvente in N das Bestreben hat zu wachsen, die Evolute in den correspondirenden Puncte M das Bestreben abzunehmen haben muß, so hat man allgemein:

$$\frac{dz}{\Delta u} = -\frac{\Delta x}{dy}.$$

§. 189.

Um das Verfahren aus dem Ordinatengesetze der Evolute das der Evolvente abzuleiten, näher zu betrachten, setze man das erste als gegeben:

$$y = \varphi(x),$$

so ist daraus die Gleichung:

$$z = \psi(u)$$

zu finden. Hier aber hängt sowohl z als u von x ab, wie aus den nachfolgenden Gleichungen erhellet, und es ist daher nicht gestattet, $\frac{dz}{\Delta u}$ zu setzen, sondern man hat als erstes Differentialverhältniß $\frac{dz}{du}$. Nun ist aber nach dem Vorhergehenden:

$$y = z + \frac{1 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}{\frac{d\left(\frac{dz}{du}\right)}{du}}$$

$$x = u - \frac{(\frac{dz}{du})^3 + \frac{dz}{du}}{\frac{d(\frac{dz}{du})}{du}}$$

Es ist nun aber:

$$\frac{(1 + (\frac{dz}{du})^2)\sqrt{(1 + (\frac{dz}{du})^2)}}{\frac{d(\frac{dz}{du})}{du}}$$

der Krümmungshalbmesser für die Evolvente, gleich dem Bogen der Evolute, welcher zu x gehört, nebst einer Constante a; also = s + a. Daher ist:

$$\frac{1 + (\frac{dz}{du})^2}{\frac{d(\frac{dz}{du})}{du}} = \frac{s + a}{\sqrt{(1 + (\frac{dz}{du})^2)}}$$

und da $\frac{dz}{du} = - \frac{\Delta x}{dy}$,

so hat man diesen Ausdruck

$$= \frac{s + a}{\sqrt{(1 + (\frac{\Delta x}{dy})^2)}} = \frac{(s + a)\, dy}{\sqrt{(dy^2 + \Delta x^2)}} = (s + a)\frac{dy}{ds}$$

daher:

$$\frac{(\frac{dz}{du})^3 + \frac{dz}{du}}{\frac{d(\frac{dz}{du})}{du}} = \frac{dz}{du}(s + a)\frac{dy}{ds}$$

$$= - \frac{\Delta x}{dy}(s + a)\frac{dy}{ds} = -(s + a)\frac{\Delta x}{ds}$$

folglich ist:

$$y = z + (s + a)\frac{dy}{ds}$$

$$x = u + (s + a)\frac{\Delta x}{ds},$$

daher:

$$z = y - (s + a) \frac{dy}{ds}$$

$$u = x - (s + a) \frac{\Delta x}{ds}.$$

Kann man daher den Bogen s der Evolute angeben, so ist es leicht, aus der Gleichung für die Evolute die der Evolvente zu finden; denn es ist sowohl s, als $\frac{dy}{ds}$ und $\frac{\Delta x}{ds}$ Function von x, und da auch y als solche gegeben ist, so ist durch obige Formeln z und u als Function von x gegeben. Eliminirt man x, so erhält man eine Gleichung zwischen z und u, d. h. die gefoderte Ordinatengleichung der Evolvente.

§. 190.

Z. B. Die Evolute sey ein Kreis, CP = x, PM = y, (Fig. 31.) der Halbmesser = r, so ist die Ordinatengleichung für denselben:

$$y = \sqrt{(r^2 - x^2)}.$$

Nun ist der Sinus des Winkels ACM $= \frac{CP}{CM} = \frac{x}{r}$ also der Bogen AM =

$$s = r. \text{ Arc. Sin } \frac{x}{r},$$

und wenn AD = a gesetzt wird, so ist

$$AD + AM = a + r \text{ Arc. Sin } \frac{x}{r}.$$

Aus der Ordinatengleichung für den Kreis folgt:

$$dy = - \frac{x \Delta x}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} = - \frac{x \Delta x}{y},$$

Ferner ist:

$$ds = \frac{\Delta x}{\sqrt{(1 - \frac{x^2}{r^2})}} = \frac{r \Delta x}{y}$$

also $\frac{dy}{ds} = - \frac{x}{r}$, $\frac{\Delta x}{ds} = \frac{y}{r}$, folglich hat man für die Evolvente die Abscisse

$$u = x - \frac{(a + r \text{ Arc. Sin } \frac{x}{r})\, y}{r}$$

für die Ordinate:

$$z = y + \frac{(a + r \text{ Arc. Sin } \frac{x}{r})\, x.}{r}$$

Ist Arc. Sin $\frac{x}{r}$ = w, so hat man: $\frac{x}{r}$ = Sin w, und $x = r \text{ Sin } w$, folglich $y = \sqrt{(r^2 - x^2)} = r\sqrt{(1 - \text{Sin } w^2)} = r \text{ Cos } w$, und daher:

$$u = r \text{ Sin } w - a \text{ Cos } w - rw \text{ Cos } w$$

$$z = r \text{ Cos } w + a \text{ Sin } w + rw \text{ Sin } w,$$

also auch:

$$u \text{ Sin } w = r \text{ Sin } w^2 - a \text{ Cos } w \text{ Sin } w - rw \text{ Cos } w \text{ Sin } w$$

$$z \text{ Cos } w = r \text{ Cos } w^2 + a \text{ Sin } w \text{ Cos } w + rw \text{ Sin } w \text{ Cos } w,$$

und folglich:

$$u \text{ Sin } w + z \text{ Cos } w = r.$$

Ist der Bogen AM = o, oder berührt der Faden den Kreis in A, so ist für den Punct D der Evolvente, $z = r$ = QD, die Abscisse u aber ist = $-a$ = CQ. Für $w = \frac{1}{2}\pi$ = AG ist $u = r$ = CG, die Ordinate $z = a + r\frac{1}{2}\pi$ = GF. Ist $a = o$, so wird die Curve AfK.

Von den Aequidistanten.

§. 191.

Es sey die Gleichung einer Curve GMH (Fig. 32.), wo AP = x, PM = y ist, gegeben:

$$y = \varphi(x)$$

es werde die Gleichung für eine Curve KQL gesucht, welche ein Punct Q der Normale QS der krummen Linie GMH beschreibt, welcher überall von M um eine constante Größe MQ = a absteht. Indem die Ordinate PM der gegebenen krummen Linie fließt, wird auch die Normale MS nach dem Gesetze:

$$y\sqrt{(1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2})}$$

fließen, und jeder feste Punct R oder Q in derselben oder in ihrer Verlängerung wird wieder eine gesetzmäßige krumme Linie beschreiben.

§. 192.

Die Ordinate der gegebenen Curve hat in jedem Zustande PM das Bestreben, eben so zu fließen, wie die Ordinate der graden Linie qr, welche die Curve in M berührt, der Punct M der Curve ist also bestrebt in der Richtung Mr fortzugehen, welche senkrecht auf QS stehet, d. h. die Normale hat das Bestreben parallel mit sich selbst fortzurücken. Jeder Punct M, Q, R u. s. w. der Normale ist also bestrebt sich rechtwinkelig über QS zu erheben, alle Richtungen Qt, Mr, Rn sind parallel, und die Ordinaten NQ, PM, ZR haben alle ein und dasselbe Bestreben zu fließen.

Ist daher die Gleichung der Curve GMH:

$$y = \varphi\,(x),$$

und die für die Curve KQL, wo AN = v, NQ = z ist:

$$z = \psi\,(v),$$

so ist in Q und M

$$\frac{dy}{\Delta x} = \frac{dz}{dv}.$$

Da nämlich z und v von x abhängig sind, so ist das erste Differentialverhältniß nicht $\frac{dz}{\Delta v}$, sondern $\frac{dz}{dv}$.

Die Linie QS ist also Normale für alle Curven, welche auf die angezeigte Art entstehen. QM ist also überall rechtwinkelig auf KL und GH, und da die Länge dieser Linie QM stets gleich bleibt, so sind beide Curven überall gleichweit von einander entfernt, weswegen man sie parallele, oder gleichlaufende Curven, (curvas aequidistantes) nennt.

§. 193.

Nun sey QM stets $= a$, so hat man:

$$\frac{NQ}{PM} = \frac{QS}{MS}, \text{ d. h.}$$

$$\frac{z}{y} = \frac{y\sqrt{(1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2})} + a}{y\sqrt{(1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2})}}$$

$$z = \frac{y\sqrt{(1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2})} + a}{\sqrt{(1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2})}} = y + \frac{a}{\sqrt{(1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2})}}$$

Ferner ist:

$$\frac{NP}{QM} = \frac{PS}{MS}$$

$$\frac{NP}{a} = \frac{y\,\frac{dy}{\Delta x}}{y\sqrt{(1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2})}} \text{ und daher}$$

$$NP = \frac{ay\,\frac{dy}{\Delta x}}{y\sqrt{(1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2})}},$$

folglich ist, da $AN = v = AP - NP = x - NP$ ist:

$$v = x - \frac{a\,\frac{dy}{\Delta x}}{\sqrt{(1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2})}}.$$

Berechnet man nach diesen allgemeinen Formeln die Coordinaten z und v, eliminirt x, so erhält man die gesuchte Gleichung zwischen z und v.

§. 194.

Man kann sehr leicht aus der Länge des Bogens der gegebenen Curve die correspondirende Bogenlänge der Aequidistante finden; denn da beide Curven in Q und M ein gleiches Ordinatenbestreben haben, so besitzen sie daselbst auch ein gleiches Curvenbestreben (§. 164.), oder es ist für diese Puncte, wenn s den Bogen der gegebenen Curve, S den der Aequidistante bezeichnet,

$$\frac{ds}{\Delta x} = \frac{dS}{dv}.$$

Drückt man nun dv durch x aus, d. h. berechnet das Differential von $x - \frac{a\frac{dy}{\Delta x}}{\sqrt{(1+\frac{dy^2}{\Delta x^2})}}$, so hat man, wenn man $\frac{dy}{\Delta x} = p$ setzt,

$$d\left(x - \frac{ap}{\sqrt{(1+p^2)}}\right) = \Delta x - \frac{\sqrt{(1+p^2)}\,a\,dp - ap\frac{p\,dp}{\sqrt{(1+p^2)}}}{1+p^2}$$

$$= \Delta x - \frac{a(1+p^2)\,dp - ap^2\,dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}} = \Delta x - \frac{a\,dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}},$$

daher erhält man, wenn dieser Werth von dv substituirt wird,

$$dS = \frac{ds}{\Delta x}\left(\Delta x - \frac{a\,dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}}\right)$$

$$= ds\left(1 - \frac{a\,dp}{\Delta x\sqrt{(1+p^2)^3}}\right)$$

$$= ds - \frac{a\,dp\,ds}{\Delta x\sqrt{(1+p^2)}\,(1+p^2)}.$$

Nun ist aber $\sqrt{.}(1+p^2)\,\Delta x = ds$, folglich:

$$dS = ds - \frac{a\,dp}{1+p^2}.$$

Hier sind die Größen S, s, p, Functionen von x, integrirt man also, so erhält man:

$$S = s - a\int\frac{dp}{1+p^2} = s - a\,\text{Arc. Tang}\,p.$$

Aber der Bogen, dessen Tangente $p = \frac{dy}{\Delta x}$ ist, gehört zu dem Winkel MCA, und seine Größe ist $= fg$, wenn $Cg = Cf = 1$ ist. Daher ist:

$$S = s - a.\,fg,$$

und beide Bogenlängen sind um einen Kreisbogen unterschieden. Dieser Unterschied ist aber nicht constant, sondern er hängt von dem Winkel ab, welchen die Berührende im Endpuncte des Bogens der Curve mit der Abscisse macht. Ob die Größe $a . fg$ positiv oder negativ ist, das hängt davon ab, ob die Curve convex oder concav ist; im ersten Falle ist bei wachsenden Ordinaten $\frac{a\,dp}{1 + p^2}$ positiv, oder allgemeiner, mit der Ordinate einstimmig, im andern Falle aber widerstreitend, welches von dp (§. 143.) herrührt. Bei der gebrauchten Figur ist also $a . fg$ negativ, und daher:

$$S = s + a . fg.$$

Nimmt man endlich a negativ an, oder soll die Curve FR die Aequidistante seyn, so findet das Gegentheil Statt.

Hat man zu irgend einer Curve GMH (Fig. 32.) die Evolute construirt, so ist es leicht, alle möglichen Aequidistanten zu ziehen, indem jeder Punct des abgewickelten Fadens eine solche beschreibt, da derselbe jederzeit Normale der Evolvente ist.

II. Von den Curven auf Polarcoordinaten bezogen, oder von den Spiralen.

§. 195.

Man kann, wie aus der analytischen Geometrie bekannt ist, jede gesetzmäßige Linie durch eine Polargleichung ausdrücken. Der mit dem Halbmesser = 1 beschriebene Kreisbogen ist hier die Gelegenheit zu fließen, welche dem Radius vector, als Fluente ertheilt werden muß, damit er dem vorgeschriebenen Gesetze gemäß, seinen Zustand verändern oder fließen könne.

Ist die Gleichung einer Curve zwischen rechtwinkeligen Coordinaten x und y gegeben, so ist es leicht, den Uebergang zur Spiralgleichung zu machen, wo z den Radius vector, als Ordinate, w den mit dem Halbmesser = 1 beschriebenen Kreisbogen, als Abscisse, bedeute. Man hat nämlich nur nöthig, für y den Werth $z \sin w$, für x aber $- z \cos w$ zu substituiren.

Umgekehrt gehet man zur Orthogonalgleichung über, indem man für z den Werth $\sqrt{(y^2 + x^2)}$, für w aber Arc. Tang $- \frac{y}{x}$ an die Stelle setzt.

Jede Curve, deren Ordinatengesetz durch eine Spiralgleichung gegeben ist, wird eine Spirale genannt.

Von den Spiralen im Allgemeinen.

§. 196.

Die allgemeinste Gleichung für die Spirale vom ersten Grade, oder der gleichförmig fließenden Spirale ist:

$$z = a + bw.$$

Die Curve hat folgenden Lauf. Es sey EF (Fig. 33) die ursprüngliche Richtung des Radius vector, A das Centrum des ursprünglichen Kreises, $A\alpha = 1 =$ dem Radius desselben. Für $w = 0$ ist $z = a$; sey dieses $= AB$, so ist B der Punct der Spirale für den Anfang der Gelegenheit. Für $z = 0$ findet man $w = - \frac{a}{b}$, welches der Bogen $\alpha\beta$ seyn mag, der, weil er negativ ist, auf der entgegengesetzten Seite also nach β hin genommen werden muß. Für diesen Bogen ist also der Radius vector $= 0$, und die Curve gehet daher durch den Punct A. Im Fortgange nimmt die Ordinate gleichförmig zu, so daß überall die Incremente Pm, Qp, Rq, Sr etc. gleich sind, wenn es mit den Winkeln MAP, PAQ etc. oder mit den ihnen correspondirenden Bogen der Fall ist.

Die Gleichung wird bequemer, wenn man nicht $\alpha\gamma$, sondern $\beta\gamma$ als Abscisse AP zur Ordinate annimmt. Macht man die Coordinatenverwandlung, indem man die neue Abscisse $u = w + \frac{a}{b}$, also $w = u - \frac{a}{b}$ setzt, so erhält man:

$$z = a + b\left(u - \frac{a}{b}\right) = bu.$$

Für $u = 0$ ist auch $z = 0$, d. h. für die ursprüngliche Richtung GF (Fig. 34.) ist die Ordinate $= 0$, die Curve gehet durch den Anfangspunct A. Während jetzt die Abscisse oder der Bogen positiv wächst, nimmt auch die Ordinate z gleich=

förmig zu, und zwar wächst sie in positiven Zuständen AB, AD etc. Wird aber a negativ, so ist es auch die Ordinate, d. h. giebt man der Ordinate eine negative Gelegenheit zu fließen, $= ac$, so wird auf dem ursprünglich als positiv angenommenen Schenkel Ac keine Ordinate möglich seyn, sondern auf seiner negativen Richtung Ak, und wenn $ab = ac = kg$ ist, so hat man aus der Gleichung $AB = AC$. Für $u = \frac{1}{2}\pi$ ist die Ordinate $AD = \frac{b\pi}{2}$; für $u = -\frac{1}{2}\pi$ ist die negative Ordinate $= -\frac{b\pi}{2} = AD$, so daß alle beide Ordinaten der Größe und Lage nach zusammenfallen, und beide Zweige der Curve in D einen gemeinschaftlichen Punct haben. Für $u = \pi$ ist $z = b\pi = AF$, für $u = -\pi$, wo also die Ordinate auf AF fällt, ist $z = -b\pi = AG$. Diese beiden Ordinaten für $u = \pi$ und $u = -\pi$ liegen also direct einander gegenüber. Für $u = \frac{3}{2}\pi$, wo also die ursprüngliche Richtung der Ordinate auf Ad fällt, ist $z = \frac{3}{2}b\pi = AK$, für $u = -\frac{3}{2}\pi = adgh$, wo also die ursprüngliche Ordinatenrichtung auf Ah, die widerstreitende auf Ad fällt, ist $z = -\frac{3}{2}b\pi = AK$; hier fallen daher wieder die Ordinaten der Lage und Größe nach zusammen, so, daß K ein gemeinschaftlicher Punct beider Schenkel ist. Allgemein substituirt man $n\pi$ und $-n\pi$ für u, so liegen beide gleiche aber widerstreitende Werthe auf der Linie GF einander gegenüber; substituirt man hingegen für u die Werthe $(n + \frac{1}{2})\pi$ und $-(n + \frac{1}{2})\pi$, so liegen beide gleiche aber widerstreitende Werthe auf der Linie AD oder AK, und fallen der Lage und Größe nach ganz mit einander zusammen, so, daß also sowohl auf AD, als AK eine unendliche Menge von Durchschnittspuncten wie K und D liegt.

§. 197.

Die Gleichung: $z = a$, welche bei parallelen Ordinaten die grade Linie ausdrückt, die mit der Abscissenrichtung parallel ist, bietet, als Spiralgleichung betrachtet, den Kreis dar, dessen Mittelpunct als Anfangspunct angenommen ist.

Ist aber das Centrum der Coordinaten in einem Puncte der Peripherie, z. B. in A, (Fig. 55.) der Durchmesser durch A als anfängliche Richtung der Ordinate angenommen; so hat man

$$Am = AB. \text{Cos.} de = - AB \text{ Cos.} ad.$$

Nennt man den Bogen $ad = w$, den Durchmesser $= a$, und $Am = z$, so hat man die Gleichung für den Kreis:

$$z = - a \text{Cos} w.$$

Für $w = 0$ ist $\text{Cos} w = 1$ und $z = - a = AB$. Für jede Abscisse unter $\frac{1}{2}\pi$, wo also der Cosinus von w positiv ist, findet man z negativ, z. B. für $w = ab$, ist $z = AM$. Für $w = \frac{1}{2}\pi$ ist $Z = 0$, d. h. der Kreis gehet jetzt durch das Centrum der Coordinaten. Werden für w Werthe über $\frac{1}{2}\pi$ gesetzt, wo also der Cosinus negativ wird, so ist z oder die Ordinate positiv, z. B. für $w = ad$, ist $z = Am$. Für $w = \pi$ ist $z = a = AB$, wo aber der Durchmesser jetzt der positiven Ordinate angehört, während für $w \doteq 0$ die negative Richtung derselben der Lage und Größe nach mit AB überein kam. Bei fortgesetzter successiver Substitution wiederholt sich dasselbe.

§. 198.

Auf solche Weise kann man daher jede bekannte Curve, deren Gleichung unter rechtwinkeligen Coordinaten bekannt ist, als Spirale betrachten, und umgekehrt, jede Gleichung einer Orthogonale als Spiralgleichung ansehen.

Will man z. B. untersuchen, was es für eine Spirale sey, welche durch die Gleichung:

$$z = \sqrt{bw}$$

ausgedrückt wird, die, als Orthogonalgleichung betrachtet, der gemeinen Parabel angehört; so bemerke man Folgendes:

Für $w = 0$ ist auch $z = 0$; je größer w wird, desto mehr wächst auch z, und zwar so, daß jeder Abscisse w zwei gleiche aber entgegengesetzte Werthe von z correspondiren. Für $w = ab$ (Fig. 36.) hat die Linie z. B. auf der positiven Richtung die Ordinate AP, auf der entgegengesetzten die ihre gleiche Ap; für $w = ac$ ist die positive Ordinate $= AQ$, die ihr entsprechende negative Aq. Für negative Abscissen giebt es keine Ordinaten, so, daß die Curve die beiden

Schenkel APQ und Apq erhält. Man kann diese Curve die Spiral-Parabel nennen.

Die Gleichung für die Ellipse als Orthogonale bietet, wenn man sie als Spiralgleichung betrachtet, eine Linie dar, welche die Form der Ziffer 8 hat. (Fig. 37.)

Die Gleichung ist:

$$z = \sqrt{(mw - \frac{m}{n} w^2)}.$$

Für w = o ist auch z = o, die Linie gehet also für diesen Werth durch den Anfangspunct oder durch das Centrum der Coordinaten. Während w wächst, nimmt zuerst auch z zu, indem wieder jedem Werthe von w zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werthe von z entsprechen. Ist die Ordinate z bis zu einem gewissen Zustande AQ gekommen, so wird sie von da an wieder abnehmen, und endlich für w = n = abd wieder zu o geworden seyn. Während die positive Ordinate den Schenkel AQA beschreibt, wird von dem negativen der congruente Schenkel AqA beschrieben werden. Man könnte diese Curve die Spiral-Ellipse nennen.

Die Orthogonalgleichung für die Hyperbel ist:

$$z = \sqrt{(mw + \frac{m}{n} w^2)},$$

betrachtet man diese als Spiralgleichung, so erhält man folgende Curve, welche man mit dem Namen der Spiral-Hyperbel belegen könnte. Für w = o ist auch z = o, hier gehet also die Curve durch das Centrum A (Fig 58.) Für positive Werthe von w, wie ac, hat die Curve zwei gleiche aber entgegengesetzte Werthe, AP und Ap, und je größer w wird, desto mehr werden auch die Ordinaten zunehmen. Für negative Abscissen werden zuerst die Ordinaten unmöglich, und erst von einem gewissen Werthe = — n derselben an wieder reell. Sey dieser Werth = ab, so wird von hier aus der Lauf beider Schenkel AQ und Aq völlig derselbe, wie für positive Abscissen. Die Curve erhält daher vier ins Unendlich fortlaufende Schenkel.

Nimmt man hier eine Coordinatenverwandlung vor, indem man den Anfangspunct in die Mitte k von ab setzt, so hat man die neue Abscisse $v = w + \frac{1}{2}n$, also $w = v - \frac{1}{2}n$, folglich $z = \sqrt{(mv - \frac{1}{2}mn + \frac{m}{n}(v - \frac{1}{2}n)^2)}$

$$= \sqrt{(mv - \tfrac{1}{2}mn + \tfrac{m}{n}v^2 - mv + \tfrac{1}{4}mn)}$$
$$= \sqrt{(\tfrac{m}{n}v^2 - \tfrac{1}{4}mn)}.$$

Für $v = o$ ist die Ordinate unmöglich, und die reellen Werthe von z gehen erst bei der Abscisse $\frac{1}{2}n$ und $-\frac{1}{2}n$ an, wie auch aus der Gleichung erhellet.

Construirt man von dem jetzigen Anfange der Abscissen, nämlich von der Richtung AD an, eine Spirale des ersten Grades, deren Gleichung

$$y = v.\sqrt{\frac{m}{n}}$$

ist, so ist klar, da man:

$$y^2 = \frac{m}{n}v^2 \text{ und}$$
$$z^2 = \frac{m}{n}v^2 - \tfrac{1}{4}mn,$$

also:

$$y^2 - z^2 = \tfrac{1}{4}mn = (y - z)(y + z)$$

und

$$y - z = \frac{mn}{4(y + z)} = AQ - AP$$

(Fig. 59.) hat, daß der Unterschied beider Ordinaten so gering werden kann, als man will, obgleich er nie ganz verschwinden wird, daß sich also beide Curven immer näher aneinander schließen, und man auch hier wie bei den Orthogonalen, die Spirale des ersten Grades die Asymtote der Spiral-Hyperbel nennen könne.

Man kann die Analogie mit den gemeinen Kegelschnitten noch weiter verfolgen, und kömmt dabei auf sehr interessante Resultate, deren Ableitung zu zeigen jedoch hier der Ort nicht ist.

Die Spirale, welche durch die Gleichung:

$$z = \frac{a}{w},$$

die Orthogonalgleichung der Hyperbel auf ihre Asymtoten bezogen, ausgedrückt wird, hat die Form der 40sten Figur. Für $w = o$ giebt es keine Ordinate, allein der Ausdruck $\frac{a}{o}$ zeigt an, daß z vorher in so großen Zuständen gewesen sey, als man sie sich nur vorstellen will. So wie w aus dem

Nullzustande hervortritt, wo also z zuerst in solchen Zuständen fließt, die jede beliebige Größe erreichen, so wird die Ordinate abnehmen, indem w zunimmt, und jeden Grad der Kleinheit erreichen können, wenn w sehr groß wird, d. h. sehr viele Umläufe um A gemacht hat. Aber = o kann z nie werden, mag w noch so groß seyn; die Curve ziehet sich also in unzählig vielen Windungen um den Punct A, welcher daher als Asymtote angesehen werden kann. So entstehet für positive Abscissen der Schenkel ABP, für negative der congruente Schenkel ABp. Diese Linie ist von *Joh. Bernoulli* Spiralis hyperbolica genannt, sie heißt auch die reciproke Spirale.

Nimmt man die auf BC senkrechte Linie AG = a an, und berechnet man den Abstand des Punctes P der Curve von der anfänglichen Richtung der Ordinate, nämlich von BC so ist dieser

$$= z \,\mathrm{Sin}\, w = \frac{a \,\mathrm{Sin}\, w}{w}$$

also der Abstand der Curve von der durch G mit BC parallel gezogenen Linie DE:

$$= a - \frac{a}{w} \,\mathrm{Sin}\, w = a\left(1 - \frac{\mathrm{Sin}\, w}{w}\right).$$

Für jeden reellen Werth von w ist $\frac{\mathrm{Sin}\, w}{w}$ ein echter Bruch, welcher aber der Einheit immer näher kömmt, je kleiner w wird, obgleich er sie nie erreichen kann. Daher ist $a\left(1 - \frac{\mathrm{Sin}\, w}{w}\right)$ für jeden reellen Werth von w eine reelle Größe, die aber, wenn man w sehr klein annimmt, dem Zustande o so nahe, als man will, gebracht werden kann, so, daß also DE eine geradlinige Asymtote der Curve ist.

Eine der interessantesten Spiralen ist die logarithmische, deren Gleichung

$$z = e^{w}$$

ist. Für w = o ist z = 1 = AB (Fig. 41.) je größer das positive w wird, desto größer wird auch z oder die Ordinate, welche überhaupt so groß werden kann, als man nur immer will. Ist w negativ, so ist $z = \frac{1}{e^{w}}$ immer ein echter Bruch, welcher so klein werden kann, als man will, jedoch nie zu o wird. Die Curve ziehet sich daher in unendlich vielen Windungen um den Punct A, ohne ihn je zu erreichen, so, daß derselbe als Asymtote betrachtet werden kann.

Die Spirale, welche durch die transcendente Gleichung:

$$z = \frac{a}{\mathrm{Sin}\, w + b\, \mathrm{Cos}\, w}$$

ausgedrückt wird, ist die grade Linie. Für $w = 0$ ist $z = \frac{a}{b} = AC$ (Fig. 42). Für $w = \frac{1}{2}\pi$ ist $z = a = AB$. Folglich ist: $\frac{AB}{AC} = \mathrm{Tang}\, BCA = b = \mathrm{Tang}\, \varphi$. Ist w negativ, so hat man:

$$z = \frac{a}{b\, \mathrm{Cos}\, w - \mathrm{Sin}\, w}.$$

Für positive Abscissen ist die Ordinate in einem unvergleichbaren Zustande, wenn $w = 180^{\circ} - \varphi$ ist. Für negative Abscissen findet ein solcher Zustand für $w = \varphi$ Statt.

§. 199.

Während die Abscisse einer Spirale fließt, kann die Ordinate oder der Radiusvector entweder wirklich wachsen, oder auch abnehmen; im ersten Falle wird nach dem Vorhergehenden $\frac{dz}{\Delta w}$ mit z einstimmig, im Gegentheil aber damit widerstreitend seyn.

Z. B. Die Gleichung für die grade Linie ist:

$$z = \frac{a}{\mathrm{Sin}\, w + b\, \mathrm{Cos}\, w}$$

wo $b = \mathrm{Tang}\, BCA = \mathrm{Tang}\, \varphi$ (Fig. 42.).

Nun hat man:

$$\frac{dz}{\Delta w} = - \frac{a\, (\mathrm{Cos}\, w - b\, \mathrm{Sin}\, w)}{(\mathrm{Sin}\, w + b\, \mathrm{Cos}\, w)^2}.$$

Da hier der Nenner ein Quadrat ist, so hat derselbe auf das Zeichen des Bruchs keinen Einfluß. So lange nun $\mathrm{Cos}\, w$ größer ist, als $b\, \mathrm{Sin}\, w$, so lange ist $\frac{dz}{\Delta w}$ negativ, also mit z widerstreitend, so lange wird also die Ordinate abnehmen; wird aber $b\, \mathrm{Sin}\, w$ größer, als $\mathrm{Cos}\, w$, so ist das

Bestreben der Ordinate positiv, also mit z einstimmig, und die Ordinate wird also wachsen.

So lange aber

$$\mathrm{Cos}\,w > b\,\mathrm{Sin}\,w \text{ oder}$$

$$\frac{\mathrm{Cos}\,w}{\mathrm{Sin}\,w} > b, \text{ d. h.}$$

$$\mathrm{Cotang}\,w > \mathrm{Tang}\,\varphi \text{ ist,}$$

so lange ist auch

$$w < \tfrac{1}{2}\pi - \varphi.$$

So lange ferner:

$$\mathrm{Cos}\,w < b\,\mathrm{Sin}\,w \text{ oder}$$

$$\frac{\mathrm{Cos}\,w}{\mathrm{Sin}\,w} < b, \text{ d. h.}$$

$$\mathrm{Cotang}\,w < \mathrm{Tang}\,\varphi \text{ ist,}$$

so lange ist auch

$$w > \tfrac{1}{2}\pi - \varphi.$$

Ziehet man also AF senkrecht auf CB, so ist klar, daß die Ordinate bis zu AF abnehmen, und nach diesem Zustande wieder wachsen muß.

Die Gleichung für die Spiral-Parabel ist:

$$z = \sqrt{bw}$$

also

$$\frac{dz}{\Delta w} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{w}}$$

so, daß $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{w}}$ das Ordinaten-Bestreben für den positiven Schenkel ($z = \sqrt{bw}$) hingegen $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{w}}$ das für den negativen ($z = -\sqrt{bw}$) ausdrückt. Nun muß aber w jederzeit mit b, dem Parameter, einstimmige Werthe haben, so, daß $\frac{b}{w}$ stets positiv ist; das Bestreben ist daher immer mit z, der Ordinate, einstimmig, und also kann diese Linie nie abnehmen.

Von der Berührung der Spiralen.

§. 200.

Lehrsatz.

Wenn zwei Spiralen KL und NQ (Fig. 43.) von welcher Art sie auch seyn mögen, in einem gleichen Ordinatenzustande, AM, ein gleiches Ordinaten-Bestreben haben; so besitzen sie in diesem Zustande, wenn man sie als Orthogonalen betrachtet, ebenfalls ein gleiches Ordinaten-Bestreben, oder beide Curven haben in M eine gemeinschaftliche Berührende.

Es sey die Gleichung der einen Spirale:

$$z = \varphi\,(w),$$

die der andern:

$$s = \psi\,(w),$$

so ist nach der Voraussetzung für jenen Zustand:

$$s = z \text{ und } \frac{dz}{\Delta w} = \frac{ds}{\Delta w}.$$

Aendert man nun die Gleichungen für beide Curven in Orthogonalgleichungen um, indem man für z den Werth $\sqrt{(y^2 + x^2)}$, für s aber $\sqrt{(v^2 + x^2)}$ und für w das einemal Arc. Tang $-\frac{y}{x}$, das anderemal Arc. Tang $-\frac{v}{x}$ setzt, so hat man:

$$dz = \frac{y\,dy + x\,\Delta x}{\sqrt{(y^2 + x^2)}}$$

$$dw = \frac{y\,\Delta x - x\,dy}{x^2 + y^2}$$

und daher:

$$\frac{dz}{dw} = \frac{(y\,dy + x\,\Delta x)\sqrt{(x^2 + y^2)}}{y\,\Delta x - x\,dv}$$

so auch:

$$\frac{ds}{dw} = \frac{(v\,dv + x\,\Delta x)\sqrt{(x^2+y^2)}}{v\,\Delta x - x\,dv}.$$

Da beide Ausdrücke für $y = v$ gleich seyn sollen, so hat man:

$$\frac{y\,dy + x\,\Delta x}{y\,\Delta x - x\,dy} = \frac{y\,dv + x\,\Delta x}{y\,\Delta x - x\,dv}$$

oder:

$$\frac{y\,\frac{dy}{\Delta x} + x}{y - x\,\frac{dy}{\Delta x}} = \frac{y\,\frac{dv}{\Delta x} + x}{y - x\,\frac{dv}{\Delta x}},$$

woraus zur Genüge erhellet, daß auch

$$\frac{dy}{\Delta x} = \frac{dv}{\Delta x}$$

sey.

Aus diesem Lehrsatze folgt, wenn zwei Spiralen außer der Ordinate und dem ersten Differential-Verhältnisse auch noch das zweite mit einander gemein haben, daß dasselbe auch noch der Fall seyn werde, wenn man die Curven als Orthogonalen betrachten wollte; denn indem man $\frac{dz}{\Delta w}$ als Fluente und $\frac{d^2 z}{\Delta w^2}$ als ihr Differential-Verhältniß ansiehet, tritt obiger Beweis unverändert wieder ein. Dasselbe findet auch mit allen folgenden Differential-Verhältnissen Statt.

Wenn also bei zwei Spiralen außer der Ordinate noch successiv alle Differential-Verhältnisse bis zum nten gleich sind, so berühren sich beide im nten Grade (§. 148.). Es ist daher leicht, die Berührungen zweier Spiralen von irgend einem Grade zu untersuchen, welches ganz auf frühere Betrachtungen zurückkömmt. Es bleibt hiebei jedoch noch mehreres zu berücksichtigen übrig.

§. 201.

Lehrsatz.

Die Tangente des Winkels, den eine berührende grade Linie einer Spirale im Berührungspuncte mit der Abscisse macht, ist dem Differential-Verhältnisse der Spirale, dividirt durch die Ordinate, gleich, beides für den Berührunspunct genommen.

Die Abscisse ist ein Kreisbogen; ziehet man damit durch M, den Berührungspunct (Fig. 44.) eine Parallele, also einen concentrischen Kreis MK, so ist der Winkel QMT derjenige, welchen die berührende QP im Berührungspuncte M mit der Abscisse formirt, wenn MT den Kreis MK in M berührt, oder auf der Ordinate AM senkrecht stehet.

Nun ist die Gleichung für die grade Linie:

$$z = \frac{a}{\mathrm{Sin}\, w + b\, \mathrm{Cos}\, w}$$

wo $b = \mathrm{Tang}\; APM$ ist.

Die Gleichung für die Curve RMQ sey:

$$y = \varphi\,(w),$$

so hat man für den Punct M

$$y = z \text{ und } \frac{dy}{\Delta w} = \frac{dz}{\Delta w}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{dz}{\Delta w} = - \frac{a\,(\mathrm{Cos}\, w - b\, \mathrm{Sin}\, w)}{(\mathrm{Sin}\, w + b\, \mathrm{Cos}\, w)^2}$$

daher hat man:

$$\frac{dy}{\Delta w} = - \frac{a\,(\mathrm{Cos}\, w - b\, \mathrm{Sin}\, w)}{(\mathrm{Sin}\, w + b\, \mathrm{Cos}\, w)^2}$$

$$= - \frac{z\,(\mathrm{Cos}\, w - b\, \mathrm{Sin}\, w)}{\mathrm{Sin}\, w + b\, \mathrm{Cos}\, w}$$

und da hier $y = z$ ist:

$$\frac{dy}{\Delta w} = - \frac{y\,(\mathrm{Cos}\, w - b\, \mathrm{Sin}\, w)}{\mathrm{Sin}\, w + b\, \mathrm{Cos}\, w}$$

$$\frac{dy}{\Delta w}\, \mathrm{Sin}\, w + \frac{dy}{\Delta w}\, b\, \mathrm{Cos}\, w = y\, b\, \mathrm{Sin}\, w - y\, \mathrm{Cos}\, w$$

$$b\,(y\, \mathrm{Sin}\, w - \frac{dy}{\Delta w}\, \mathrm{Cos}\, w) = \frac{dy}{\Delta w}\, \mathrm{Sin}\, w + y\, \mathrm{Cos}\, w$$

also:

$$b = \frac{\frac{dy}{\Delta w}\,\mathrm{Sin}\,w + y\,\mathrm{Cos}\,w}{y\,\mathrm{Sin}\,w - \frac{dy}{\Delta w}\,\mathrm{Cos}\,w} = \mathrm{Tang}\,APM.$$

Nun ist aber

$$\mathrm{Tang}\,PMA = -\,\mathrm{Tang}\,(w + APM),$$

folglich, wenn man der Kürze wegen $PMA = q$, $APM = p$ nennt:

$$\mathrm{Tang}\,q = -\,\mathrm{Tang}\,(w + p)$$

$$= -\,\frac{\mathrm{Tang}\,w + \mathrm{Tang}\,p}{1 - \mathrm{Tang}\,w\,\mathrm{Tang}\,p}$$

$$= -\,\frac{\frac{\mathrm{Sin}\,w}{\mathrm{Cos}\,w} + \frac{\frac{dy}{\Delta w}\,\mathrm{Sin}\,w + y\,\mathrm{Cos}\,w}{y\,\mathrm{Sin}\,w - \frac{dy}{\Delta w}\,\mathrm{Cos}\,w}}{1 - \frac{\frac{dy}{\Delta w}\,\mathrm{Sin}\,w^2 + y\,\mathrm{Cos}\,w\,\mathrm{Sin}\,w}{y\,\mathrm{Sin}\,w\,\mathrm{Cos}\,w - \frac{dy}{\Delta w}\,\mathrm{Cos}\,w^2}}$$

$$= -\,\frac{y\,\mathrm{Sin}\,w^2 + y\,\mathrm{Cos}\,w^2}{y\,\mathrm{Sin}\,w\,\mathrm{Cos}\,w - \frac{dy}{\Delta w}\,\mathrm{Cos}\,w^2 - \frac{dy}{\Delta w}\,\mathrm{Sin}\,w^2 - y\,\mathrm{Cos}\,w\,\mathrm{Sin}\,w}$$

$$= \frac{y}{\frac{dy}{\Delta w}}.$$

Dieses ist die Tangente von q oder PMA, und da der Winkel AMT ein rechter, also $\mathrm{Tang}\,PMA = \mathrm{Cotang}\,QMT$, so hat man:

$$\mathrm{Cotang}\,QMT = \frac{y}{\frac{dy}{\Delta w}}.$$

und daher:

$$\mathrm{Tang}\,QMT = \frac{dy}{y.\,\Delta w}.$$

Hieraus folgt umgekehrt:

$$\frac{dy}{\Delta w} = y\,\mathrm{Tang}\,QMT,$$

d. h. das Bestreben, womit die Ordinate einer

Spirale in irgend einem Zustande fließen will, ist gleich der Tangente des Winkels, welchen die Berührende in jenem Zustande mit der Abscisse macht, multiplicirt mit der Ordinate.

Bekömmt daher $\frac{dz}{\Delta w}$ die Form $\frac{a}{o}$, so ist der Winkel QMT $= 90°$, die Berührende ist daher die Ordinate selbst; ist aber $\frac{dy}{\Delta w} = o$, so ist, wenn y reell ist, Tang QMT $= o$, d. h. die Berührende stehet auf der Ordinate senkrecht.

Z. B. Für die Spirale des ersten Grades hat man: $z = bw$ daher $\frac{dz}{z\Delta w} = \frac{1}{w}$ und dieses ist für $w = o$, $= \frac{1}{o}$, daher ist die anfängliche Richtung TF (Fig. 34.) des Radiusvector oder der Ordinate die Tangente für den Punct, für welchen die Ordinate $= o$ ist, also im Centrum.

Für den Kreis aus dem Mittelpuncte betrachtet, hat man $z = r$, $\frac{dz}{z\Delta w} = o$, daher ist überall die Tangente rechtwinkelig auf der Ordinate.

Für den Kreis aus einem Puncte der Peripherie betrachtet, hat man:

$$z = -a \operatorname{Cos} w \text{ also}$$

$$\frac{dz}{z\Delta w} = -\operatorname{Tang} w.$$

Für $w = o$ ist $\frac{dz}{z\Delta w} = o$, daher steht in B (Fig. 35.) die Tangente senkrecht auf der dazu gehörenden Ordinate AB. Für $w = \frac{1}{2}\pi$, erhält $\frac{dz}{z\Delta w}$ die Form $\frac{a}{o}$, daher ist hier die Ordinate AP oder Ap selbst die Tangente.

Bei der Spiralparabel ist

$$z = \sqrt{bw}, \frac{dz}{z\Delta w} = \frac{\sqrt{\frac{b}{w}}}{2\sqrt{bw}} = \frac{1}{2w}.$$

Für $w = o$ ist $\frac{dz}{z\Delta w} = \frac{1}{o}$, die anfängliche Richtung der Ordinate ist also die Tangente der Curve ein Centrum.

Für die Spiral-Ellipse ist

$$z = \sqrt{(m w - \frac{m}{n} w^2)}$$

$$\frac{dz}{z \Delta w} = \frac{m - \frac{2m}{n} w}{m w - \frac{m}{n} w^2}.$$

Für w = o ist $\frac{dz}{z \Delta w} = \frac{m}{o}$, daher ist die anfängliche Richtung der Ordinate die Tangente im Centrum.

Für $w = \frac{1}{2} n$ ist $\frac{dz}{z \Delta w} = o$. Hier stehet also die Berührende senkrecht auf der Ordinate AQ (s. Fig. 37.).

§. 202.

Ziehet man AH (Fig. 45.) mit der Berührenden parallel, errichtet auf der Ordinate in A und M Perpendikel AV und MH, und fället aus M auf AH das Loth MG; so nennt man AV oder MH die **Subtangente**, VM die **Tangente**, MG die **Normale** und GA die **Subnormale**.

Da Tang PMA $= \frac{y \Delta w}{dy}$

ist, so hat man

$$AV = \frac{y^2 \Delta w}{dy}$$

= der Subtangente.

Daher ist:

$$VM = y \operatorname{Sec} PMA = y \sqrt{(1 + \operatorname{Tang} PMA^2)}$$

$$= y \sqrt{(1 + \frac{y^2 \Delta w^2}{dy^2})}$$

$$= \frac{y}{dy} \sqrt{(dy^2 + y^2 \Delta w^2)}$$

= der Tangente.

Da ferner der Winkel GMH = PMA, so hat man:

$$MG \operatorname{Sec} GMH = MH = \frac{y^2 \Delta w}{dy}$$

$$MG = \frac{y^2 \Delta w}{dy.\ \text{Sec. GMH}} = \frac{y^2 \Delta w}{dy \sqrt{(1 + \frac{y^2 \Delta w^2}{dy^2})}}$$

$$= \frac{y^2 \Delta w}{\sqrt{(dy^2 + y^2 \Delta w^2)}} = \frac{y^2}{\sqrt{(y^2 + \frac{dy^2}{\Delta w^2})}}$$

= der Normale.

Ferner ist:

$$AG \text{ Tang } MAG = MG = \frac{y^2}{\sqrt{(y^2 + \frac{dy^2}{\Delta w^2})}}$$

daher:

$$AG = \frac{y^2}{\sqrt{(y^2 + \frac{dy^2}{\Delta w^2})}} \cdot \frac{1}{\text{Tang } MAG}$$

$$= \frac{y^2\, dy}{\sqrt{(y^2 + \frac{dy^2}{\Delta w^2})}\ y\, \Delta w}$$

$$= \frac{y\, dy}{\sqrt{(y^2 \Delta w^2 + dy^2)}}$$

= der Subnormale.

§. 203.

Z. B. Die Gleichung für die Spiralparabel ist: $z = \sqrt{bw}$, daher: $\frac{dz}{\Delta w} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{w}}$ also die Subtangente

$$= 2.\ z^2 \sqrt{\frac{w}{b}} = 2\, bw \sqrt{\frac{w}{b}} = 2w \sqrt{bw},$$

die Subnormale:

$$= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{bw}.\ \sqrt{\frac{b}{w}}.\ \Delta w}{\sqrt{(bw\, \Delta w^2 + \frac{1}{4}\frac{b}{w}\ \Delta w^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{bw}}{\sqrt{(1 + 4w^2)}}.$$

Die Spirale des ersten Grades hat zur Gleichung $z = a + bw$, $\frac{dz}{\Delta w} = b$, daher die Subtangente:

$$= \frac{(a + bw)^2}{b},$$

die Subnormale:

$$= \frac{b(a + bw)}{\sqrt{((a + bw)^2 + b^2)}}$$

ist $a = 0$, so ist also

die Subtangente $= bw^2$,

die Subnormale $= \frac{bw}{\sqrt{(1 + w^2)}}$.

Die Gleichung für die logarithmische Spirale ist:

$$z = e^w, \ \frac{dz}{\Delta w} = e^w,$$

daher die Subtangente:

$$= e^w,$$

die Subnormale $= \frac{e^{2w}}{\sqrt{(e^{2w} + e^{2w})}} = \frac{e^w}{\sqrt{2}}$

die Tangente $= e^w \sqrt{(1 + 1)} = e^w \sqrt{2}$

die Normale $= \frac{e^{2w}}{\sqrt{(e^{2w} + e^{2w})}} = \frac{e^w}{\sqrt{2}}$.

§. 204.

Es werde verlangt, die Gleichung für diejenige Spirale zu finden, bei welcher die Tangente des Winkels, den die Berührende mit der Abscisse macht, constant ist. Der Ausdruck für die Tangente ist $\frac{dz}{z\Delta w}$, soll dieses constant, $= a$ seyn, so hat man:

$$\frac{dz}{z} = a\,\Delta w \text{ oder}$$

$$\log\text{nat}\, z = aw \text{ und } z = e^{aw},$$

die Spirale ist daher die logarithmische.

§. 205.

Will man die Gleichung für diejenige Spirale finden, deren Subtangente constant, $= a$ ist, so hat man:

$$\frac{z^2 \Delta w}{dz} = a$$

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{\Delta w}{a}$$

$$\frac{1}{z} = -\frac{w}{a} \text{ oder}$$

$$z = -\frac{a}{w},$$

welches die Gleichung für die hyperbolische Spirale ist. Die Subtangente ist immer der Linie AG (Fig. 40.) gleich.

Von der Quadratur der Spiralen.

§. 206.

Wenn sich eine grade Linie AP (Fig. 46.) um den Punct A drehet, und dabei in Bezug auf ihr eignes Wachsen oder Abnehmen einem gewissen Gesetze folgt, so wird sie einen Flächenraum beschreiben, dessen Gesetz zu wachsen von dem Gesetze, wonach die Ordinate AP fließt, d. h. von dem Ordinatengesetze abhängt. Ist AP oder $z = \varphi(w)$, so wird auch der Flächenraum s eine Function von w, $= \psi(w)$ seyn, und $\psi(w)$ muß von $\varphi(w)$ auf irgend eine Art abhängen, und davon abgeleitet werden können.

§. 207.

Wenn die Ordinate für eine Abscisse CAQ in einem größeren Zustande AQ ist, als für eine andere Abscisse CAP, so wird die von der Curve und den beiden Ordinaten eingeschlossene Area in dem Zustande ACQ ein größeres Bestreben zu wachsen haben, als in dem Zustande ACP; denn eine größere Linie ist bestrebt eine größere Fläche zu beschreiben, als eine kleinere. Wenn daher die Ordinate einer Curve wächst, so wird auch das Bestreben der Fläche, d. h. das

Flächen- oder Arealbestreben zunehmen, die letztere wird also mit Acceleration fließen; wenn hingegen die Ordinate abnimmt, so wird das Flächen-Bestreben abnehmen müssen, und die Fläche fließt daher mit Retardation. Soll endlich das Bestreben dasselbe bleiben, oder die Area mit Gleichförmigkeit fließen, so dürfen die Ordinaten weder wachsen, noch abnehmen, d. h. die Spirale wird in diesem Falle ein Kreis seyn, dessen Mittelpunct zum Centrum der Coordinaten angenommen ist.

§. 208.

Lehrsatz.

Das Arealbestreben einer Spirale ist gleich dem Quadrate der Ordinate dividirt durch 2.

Stellt man sich zwei Spiralen vor, wovon die eine so beschaffen ist, daß die Area allgemein mit Ungleichförmigkeit, gleichviel, ob mit Acceleration, oder mit Retardation, fließt, die andere so, daß das Fließen ihrer Area mit Gleichförmigkeit geschieht; daß ferner beide auf eine und dieselbe Abscisse bezogen sind, und für einen gewissen Werth BCQ (Fig. 47.) derselben, ein gleiches Bestreben zu fließen besitzen: so ist nach dem Vorhergehenden klar, daß beide Curven für diesen Werth der Abscisse eine gleiche Ordinate CQ haben müssen.

Um nun das constante Bestreben, womit die Fläche des Kreises fließt, zu erkennen, so genügt es, zu bemerken, daß, wenn der Radius $= r$ ist, und man die Abscisse w nennt, die Area $v = \frac{r^2 w}{2}$ ist, wodurch man also die gefoderte Gleichung hat. Das constante Flächen-Bestreben ist daher $=$

$$\frac{dv}{\Delta w} = \frac{r^2}{2}.$$

Da nun die Curve im Puncte Q dieses mit dem Kreise gemein hat, und für diesen Zustand nothwendig $r =$ der Ordinate z der Curve seyn muß, so folgt, daß das Flächen-Bestreben einer Spirale nichts anders, als das Quadrat der Ordinate dividirt durch 2 ist.

§. 209.

Hat man also eine Spirale, deren Gleichung
$$z = \varphi\,(w)$$
ist, und man fingirt die Gleichung für die Area:
$$v = \psi\,(w),$$
so hat man:
$$\frac{dv}{\Delta w} = \frac{z^2}{2},$$
daher
$$v = \tfrac{1}{2}\int z^2\,\Delta w. + C.$$

§. 210.

Z. B. Die Gleichung für die Spirale des ersten Grades ist
$$z = bw,$$
daher die Fläche:
$$v = \tfrac{1}{2}b^2\int w^2\,\Delta w = \frac{b^2\,w^3}{6} + C.$$

Für $w = o$, wo also die Ordinate in der anfänglichen Richtung EC (Fig. 48.) liegt, fängt auch die Fläche zu fließen an, für diesen Werth von w ist also $v = o$, woraus auch $C = o$ folgt, daher hat man:
$$v = \frac{b^2\,w^3}{6} = \tfrac{1}{6}\,z^2\,w.$$

Nun ist aber, wenn man um A mit dem Halbmesser $AB = z$ den Kreisbogen EDB beschreibt, derselbe $= zw$, folglich die Fläche $AEDBA = \tfrac{1}{2}\,z^2\,w$, und also hat man v oder die Fläche $AkBA = \tfrac{1}{3}\,AEDBA$.

§. 211.

Die Gleichung für die Spiral-Parabel ist: $z = \sqrt{bw}$, daher:
$$v = \tfrac{1}{2}b\int w\,\Delta w$$
$$= \tfrac{1}{4}bw^2 + C,$$

wobei C = o wird, wenn die Fläche für $z = o$ anfangen soll, man hat also

$$v = \tfrac{1}{4} b w^2 = \tfrac{1}{4} z^2 w.$$

Nun ist aber $\frac{1}{2} z^2 w$ = der Fläche ADQ (Fig. 36.), wenn DQ ein aus A mit AQ = z beschriebener Kreisbogen ist, daher ist die Fläche APQA = $\frac{1}{2}$ ADQ.

§. 212.

Für die Spiral-Ellipse hat man:

$$z = \sqrt{(mw - \tfrac{m}{n} w^2)}$$

daher:

$$v = \tfrac{1}{2} \int (mw - \tfrac{m}{n} w^2) \Delta w$$

$$= \tfrac{1}{2} m \int w \, \Delta w - \tfrac{m}{2n} \int w^2 \, \Delta w$$

$$= \tfrac{m}{4} w^2 - \tfrac{m}{6n} w^3 + C,$$

wo wieder C = o ist, dafern die Fläche für $z = o$ anfangen soll, daher ist:

$$v = \tfrac{m}{4} w^2 - \tfrac{m}{6n} w^3.$$

Setzt man $w = n = abd$, so ist

$$v = \tfrac{1}{4} mn^2 - \tfrac{1}{6} mn^2$$

$$= \tfrac{1}{12} mn^2,$$

welches die Fläche des einen Schenkels AQ ist.

§. 213.

Die Gleichung für die logarithmische Spirale ist:

$$z = e^w,$$

daher:

$$v = \tfrac{1}{2} \int e^{2w} \Delta w = \tfrac{1}{4} e^{2w} + C,$$

für $w = 0$ mag die Fläche anfangen, also ist:

$$0 = \frac{1}{4} + C,\ C = -\frac{1}{4},$$

also

$$v = \frac{1}{4}(e^{2w} - 1) = \frac{1}{4}(z^2 - 1)$$
$$= \frac{1}{4}(z - 1)(z + 1).$$

Macht man nun $AE = z - 1 = AP - AB$, und $AM = z + 1 = AP + AB$, so ist die Fläche ABP der Spirale $= \frac{1}{4}$ des Parallelograms AEFM.

Von der Rectification der Spiralen.

§. 214.

Lehrsatz.

Sollen zwei Spiralen QPR und TPS (Fig. 50.), welche für eine Abscisse DAP zu einem gemeinschaftlichen Ordinaten-Zustande AP gekommen sind, in demselben ein gleiches Curvenbestreben haben, so ist nöthig, daß sie in diesem Zustande auch ein gleiches Ordinatenbestreben, oder eine gemeinschaftliche Berührende besitzen.

Denn je größer das Ordinatenbestreben in einem gewissen Puncte ist, je größer ist auch das Bestreben, des die Curve beschreibenden Puncts P, sich von seinem Orte zu entfernen, oder eine Bahn zu durchlaufen, d. h. je größer ist auch das Curvenbestreben. Sollen daher die beiden Spiralen in P ein gleiches Curvenbestreben haben, so darf das Ordinatenbestreben der einen nicht größer seyn, als das der andern, d. h. sie müssen eine gemeinschaftliche Berührende haben.

Wenn eine Spirale für die kleinere Ordinate AP ein eben so großes Ordinatenbestreben hat, als für die größere AQ, so wird das Curvenbestreben in Q größer seyn, als in P, und zwar wird sich, wie auf den ersten Blick erhellet, das Curvenbestreben in Q zu dem in P verhalten, wie AQ zu AP. Das Curvenbestreben in einem gewissen Zustande wird also sowohl vom Ordinatenbestreben in demselben, als auch von der Ordinate selbst abhängen. Damit also das Curvenbestreben einer Spirale constant sey, oder die Länge derselben mit Gleichförmigkeit fließe, muß entweder sowohl die Ordinate, als auch das Ordinatenbestreben stets unveränderlich seyn, wie es beim Kreise der Fall ist, dessen Mittelpunct zum Centrum der Coordinaten angenommen ist; oder, wenn die Ordinaten wachsen, muß das Ordinatenbestreben abnehmen, und zwar so, daß sich beides, wenn daraus das Curvenbestreben zusammengesetzt wird, zu einer Constante aufhebt; oder endlich, wenn die Ordinaten abnehmen, so muß das Ordinatenbestreben wachsen, so daß dabei dieselbe Compensation Statt findet.

§. 215.

Die Curve zu finden, welche diese Eigenschaft hat, ist leicht. Man weiß aus der Elementargeometrie, daß ein Winkel PAp (Fig. 51.) die Hälfte des Bogens Pp zu seinem Maße hat. Betrachtet man daher den Kreis als Spirale, indem man einen Punct A der Peripherie als Coordinatencentrum annimmt, so daß also die Ordinatengleichung, wie wir früher gesehen haben

$$z = - a \operatorname{Cos} w$$

ist, wenn a den Durchmesser bedeutet; so fließt die Länge des Bogens gleichförmig, wenn der Winkel GAP als Gelegenheit zum Fließen, d. h. als gleichförmig wachsend angesehen wird. Die Gleichung zwischen dieser Länge s und der Abscisse ist also

$$s = g + bw,$$

oder, wenn der Bogen für $w = 0$ anfangen soll, $s = bw$. Suchen wir das b, oder das Bestreben, womit die Länge fließt, zu construiren, so ist für die Abscisse HAP der beschriebene Bogen

$$KMAP = \tfrac{1}{2} a\pi + \text{Arc. } AP.$$

Nun ist aber der Bogen $AP = \frac{1}{2} a. ACP = a. EAP = a \left(w - \frac{1}{2}\pi\right)$, folglich, wenn man den Bogen KMAP $= s$ nennt, hat man:

$$s = aw,$$

so, daß also das Bestreben, womit die Länge des Bogens fließt, $= a =$ dem Durchmesser ist.

§. 216.

Will man nun die Curvenlängen zweier Spiralen, QR und ST (Fig. 52.), wovon die eine mit Ungleichförmigkeit, die andere aber gleichförmig fließt, mit einander vergleichen, und zu dem Zwecke annehmen, daß beide Curven sich in einem und denselben Zustande AP befinden, und daselbst ein gemeinschaftliches Ordinatenbestreben haben; so kann man zu dieser Vergleichung den aus seinen Mittelpuncte, als Coordinatencentrum betrachteten Kreis, nicht anwenden, indem bei gleicher Ordinate das Ordinatenbestreben nur in dem speciellen Falle bei beiden gemeinschaftlich seyn kann, wenn sich die Ordinate der Curve grade im Zustande des Maximi befindet. Betrachtet man jedoch den Kreis aus einem Puncte seines Umfanges, so kann jene Vergleichung jedesmal geschehen, wie sogleich klar werden wird.

§. 217.

Lehrsatz.

Das Curvenbestreben in einem gewissen Zustande einer beliebigen Spirale ist gleich der Secante des Winkels, welchen die Berührende in jenem Zustande mit der Abscisse macht, multiplicirt mit der Ordinate.

Man denke sich eine Curve NPD, welche, aus dem Coordinatencentrum A betrachtet, von der Beschaffenheit ist, daß ihre Länge mit Ungleichförmigkeit, sey es mit Acceleration, oder mit Retardation, fließt. Man denke sich ferner, daß eine andere Curve, auf dasselbe Coordinatencentrum A bezogen, für den Werth GAP der Abscisse mit der andern Curve dieselbe Ordinate AP habe, jedoch so beschaffen sey, daß ihre Länge mit Gleichförmigkeit fließt; so kann dieses realisirt werden, wenn man sich durch A und P einen Kreis APN gelegt, vorstellt. Dieses kann aber auf unzählig viele

Arten geschehen, und die Centra aller möglichen Kreise werden auf der Linie QF liegen, welche man in der Mitte von AP senkrecht auf dieser Linie errichtet hat. Dieser Kreis habe nun auch in P mit der Curve NPD ein gleiches Curvenbestreben, so besitzen beide Curven in diesem Zustande auch ein gleiches Ordinatenbestreben, oder eine gemeinschaftliche Tangente MS. Errichtet man daher auf MS in P ein Perpendikel, so liegt der Mittelpunct des Kreises auf demselben, welchen also der Durchschnitt C der beiden Linien QF und PK darbietet. Ziehet man also durch A und C eine grade Linie AN, so ist diese der Durchmesser, welcher nach dem Vorhergehenden der Ausdruck für die Größe des Curvenbestrebens dieses Kreises ist. Da nun nach der Voraussetzung beide Curven im P ein gleiches Curvenbestreben besitzen, so ist auch $AN = AP. \text{Sec. } PAN$ das Curvenbestreben der Spirale NPD in P. Setzt man daher für AP das Zeichen z, so hat man, wenn vorher die Gleichung zwischen dem Bogen s und der Absciſſe w folgendermaßen fingirt wurde:

$$s = \psi(w),$$

für das Curvenbestreben den Ausdruck:

$$\frac{ds}{\Delta w} = z \,\text{Sec. } PAN = z.\ \text{Sec.} SPN.$$

d. h = der Secante des Winkels, welchen die Berührende mit der Absciſſe macht, multiplicirt durch z.

Daraus findet man

$$\frac{ds}{\Delta w} = z\sqrt{(1 + (\text{Tang } SPN)^2)},$$

und da nach §. 201. $\text{Tang } SPN = \frac{dz}{z\,\Delta w}$ ist, so hat man:

$$\frac{ds}{\Delta w} = z\sqrt{(1 + \frac{dz^2}{z^2\,\Delta w^2})}$$

$$= \sqrt{(z^2 + \frac{dz^2}{\Delta w^2})}.$$

Ist daher die Gleichung für irgend eine Spirale gegeben:

$$z = \varphi(w)$$

und man fingirt das Curvengesetz:

$$s = \psi(w),$$

so hat man

$$s = \int \sqrt{(z^2 + \frac{dz^2}{\Delta w^2})}\, \Delta w + \text{Const.}$$

§. 218.

Die Ordinatengleichung für die Spirale des ersten Grades ist:

$$z = aw,$$

daher hat man:

$$s = \int \sqrt{(aw^2 + a^2)}\, \Delta w$$
$$= a \int \sqrt{(1 + w^2)}\, \Delta w$$
$$= \frac{aw}{2} \sqrt{(1 + \frac{1}{a} w^2)} + \tfrac{1}{2} \int \frac{\Delta w}{\sqrt{(1 + \frac{1}{a} w^2)}}$$
$$= \tfrac{1}{2} aw \sqrt{(1 + \frac{1}{a} w^2)} + \frac{1}{2\sqrt{a}} \log(w \sqrt{\frac{1}{a}}$$
$$+ \sqrt{(1 + \frac{1}{a} w^2)}) + \text{Const.}$$

Soll $s = 0$ seyn, wenn $w = 0$ ist, so findet sich auch Const. $= 0$.

§. 219.

Die Gleichung für die logarithmische Spirale ist:

$$z = e^w,$$

folglich

$$s = \int \sqrt{(e^{2w} + e^{2w})}\, \Delta w$$
$$= \sqrt{2} \int e^w\, \Delta w = \sqrt{2}.\, e^w + C.$$

Für $w = 0$ mag der Bogen anfangen, daher hier auch $s = 0$, also

$$0 = \sqrt{2} + C,\ C = -\sqrt{2},$$

daher allgemein:

$$s = \sqrt{2}.\,(e^w - 1) = \sqrt{2}.\,(z - 1).$$

§. 220.

Für die reciproke Spirale ist:

$$z = \frac{a}{w},$$

folglich

$$\frac{dz}{\Delta w} = -\frac{a}{w^2},$$

und daher

$$s = \int \sqrt{\left(\frac{a^2}{w^2} + \frac{a^2}{w^4}\right)} \Delta w$$

$$= a \int \frac{1}{w^2} \sqrt{(1 + w^2)}\, \Delta w$$

$$= a\left(-\frac{\sqrt{(1 + w^2)}}{w} + \int \frac{\Delta w}{\sqrt{(1 + w^2)}}\right)$$

$$= a \log\left(w + \sqrt{(1 + w^2)}\right) - \frac{a\sqrt{(1 + w^2)}}{w} + C.$$

Der Bogen mag da anfangen, wo die Ordinate $= a$, also $w = 1$ ist, so hat man:

$$o = a \log(1 + \sqrt{2}) - a\sqrt{2} + C \text{ also}$$

$$C = a\sqrt{2} - a \log(1 + \sqrt{2}).$$

Für den Kreis, aus einem Puncte der Peripherie betrachtet, hat man $z = -a \operatorname{Cos} w$, also $\frac{dz}{\Delta w} = a \operatorname{Sin} w$, daher

$$s = \int \sqrt{(a^2 \operatorname{Cos} w^2 + a^2 \operatorname{Sin} w^2)}\, \Delta w$$

$$= a w + C.$$

wo $C = o$ wird, wenn für $w = o$ der Bogen anfangen soll, also $s = a w$, wie auch schon bekannt ist.

Von der Krümmung der Spiralen.

§. 221.

Wenn eine Curve in B (Fig. 54.) die Richtung BD, in P die Richtung ML hat, so ist der Definition des §. 174. gemäß, der Unterschied beider Richtungen oder der Winkel MEB, die Krümmung des Bogens BP.

Stehet GB auf AB oder der anfänglichen Richtung der Ordinate, senkrecht, so ist Tang GBD $= \frac{dz}{z \Delta w}$, wenn man in diesen Ausdruck für w den Werth o setzt. Wir wollen diese Tangente = a nennen. Ferner ist Tang LPK $= \frac{dz}{z \Delta w}$, wo für w der Werth BAP der Abscisse, welcher zu AP gehört, gesetzt ist. Bedeutet r den rechten Winkel, so ist DBA = r + DBG, ferner DPA = r − LPK, und man hat:

$$r + DBG + BAP + MPA + PEB = 4r$$
$$r + DBG + BAP + r - LPK + PEB = 4r$$
$$w + DBG - LPK + PEB = 2r$$
$$w + DBG - LPK = 2r - PEB = MEB.$$

Dieser Winkel MEB ist aber die Krümmung y, und setzt man DBG = h, LPK = k, so ist:

$$y = w + h - k = w - (k - h)$$

$$\text{Tang } y = \frac{\text{Tang } w - \text{Tang } (k-h)}{1 + \text{Tang } w.\ \text{Tang } (k-h)}$$

Nun ist aber $\text{Tang } (k-h) = \frac{\text{Tang } k - \text{Tang } h}{1 + \text{Tang } k\ \text{Tang } h}$

und da $\text{Tang } k = \frac{dz}{z \Delta w}$, Tang h = a ist, so hat man

$$\text{Tang } (k-h) = \frac{\frac{dz}{z \Delta w} - a}{1 + \frac{a\,dz}{z \Delta w}} = \frac{dz - a z \Delta w}{z \Delta w + a\,dz}$$

daher:

$$\text{Tang } y = \frac{\text{Tang } w - \frac{dz - a z \Delta w}{z \Delta w + a\,dz}}{1 + \frac{a\,dz - a^2 z \Delta w}{z \Delta w + a\,dz} \text{Tang } w}$$

$$= \frac{\text{Tang } w.\ (z \Delta w + a\,dz) - dz + a z \Delta w}{z \Delta w + a\,dz + (dz - a z \Delta w)\ \text{Tang } w}.$$

Nennen wir den Zähler dieses Bruchs P, den Nenner Q, so hat man:

$$y = \text{Arc. Tang } \frac{P}{Q},$$

welches die Gleichung für die Krümmung ist. Will man daraus das Krümmungsbestreben finden, so hat man nur nöthig, $\frac{dy}{ds}$ zu berechnen. Nun ist aber:

$$dy = \frac{d\left(\frac{P}{Q}\right)}{1 + \frac{P^2}{Q^2}} = \frac{Q\,dP - P\,dQ}{Q^2 + P^2}.$$

Substituirt man hier für Q, P, dQ, dP die ihnen zugehörenden Werthe, so erhält man am Ende:

$$dy = \frac{z^2 \triangle w^3 - z\,d^2 z \triangle w + 2\,dz^2 \triangle w}{z^2 \triangle w^2 + dz^2},$$

und folglich das Krümmungsbestreben:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{z^2 \triangle w^3 - z\,d^2 z \triangle w + 2\,dz^2 \triangle w}{\sqrt{(z^2 \triangle w^2 - dz^2)^3}}$$

Betrachtet man einen Kreis, welcher eine Spirale an einem gewissen Puncte im zweiten Grade berührt, so findet man seinen Halbmesser =

$$v = \frac{\sqrt{(z^2 \triangle w^2 + dz^2)^3}}{z^2 \triangle w^3 - z\,d^2 z \triangle w + 2\,dz^2 \triangle w}$$

folglich ist sein Bestreben, womit er sich gleichförmig krümmt, =

$$\frac{1}{r} = \frac{z^2 \triangle w^3 - z\,d^2 z \triangle w + 2\,dz^2 \triangle w}{\sqrt{(z^2 \triangle w^2 + dz^2)^3}},$$

woraus folgt, daß jener Kreis mit der Curve an dem Berührungspuncte gleiches Krümmungsbestreben habe. Diesen Kreis nennt man auch hier, wie bei den Orthogonalen den Krümmungskreis, und seinen Halbmesser den Krümmungshalbmesser.

§. 222.

Es ist z. B. die Gleichung für die Spirale des ersten Grades: $z = aw$, folglich ist $dz = a \triangle w$, $d^2 z = 0$, und daher der Krümmungshalbmesser:

$$r = \frac{\sqrt{(a^2 w^2 \triangle w^2 + a^2 \triangle w^2)^3}}{a^2 w^2 \triangle w^3 + 2 a^2 \triangle w^3}$$

$$= \frac{a^3 \Delta w^3 \sqrt{(1 + w^2)^3}}{a^2 \Delta w^3 (2 + w^2)} = \frac{a \sqrt{(1 + w^2)^3}}{2 + w^2}.$$

Für $w = 0$ oder im Anfange ist $r = \frac{a}{2}$.

§. 223.

Für die logarithmische Spirale ist: $z = e^w$ $dz = e^w \Delta w$, $d^2 z = e^w \Delta w^2$, folglich:

$$r = \frac{\sqrt{(e^{2w} \Delta w^2 + e^{2w} \Delta w^2)^3}}{e^{2w} \Delta w^3 - e^{2w} \Delta w^3 + 2 e^{2w} \Delta w^3}$$

$$= \frac{e^{3w} \Delta w^3 \sqrt{8}}{2 e^{2w} \Delta w^3} = e^w \sqrt{2}.$$

§. 224.

Für die Spiral-Parabel ist $z = \sqrt{bw}$, daher $dz = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{w}}. \Delta w$, $d^2 z = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{b}{w^3}}. \Delta w^2$, also

$$r = \frac{\sqrt{(bw \Delta w^2 + \frac{1}{4} \frac{b}{w} \Delta w^2)^3}}{bw. \Delta w^3 + \frac{1}{4} \frac{b}{w} \Delta w^3 + \frac{1}{2} \frac{b}{w} \Delta w^3}$$

$$= \frac{\sqrt{(bw - \frac{1}{4} \frac{b}{w})^3}}{bw + \frac{3}{4} \frac{b}{w}}.$$

III. Von den Rotationskörpern.

§. 225.

Wenn sich eine Curve um eine grade Linie, als Axe, drehet, so wird dadurch eine Art von Körpern erzeugt, welche man **Rotationskörper** (Solides de Révolution) nennt.

Man kann sich die Erzeugung dieser Körper auch so vorstellen, daß sich ein Kreis mit veränderlichem Radius dessen

Ebene immer mit sich selbst parallel bleibt, so fort bewegt, daß das Centrum desselben stets auf einer graden Linie, welche senkrecht auf der Ebene des Kreises steht, fortrückt.

Das Gesetz, nach welchem der Halbmesser des Kreises fließt, ist die Gleichung der erzeugenden Curve.

Von der Cubatur der Rotationskörper.

§. 226.

Eine größere Kreisfläche Rr (Fig. 55.) hat das Bestreben, einen größeren körperlichen Raum zu beschreiben, als eine kleinere Kreisfläche Mm, wenn der Kreis nach der im vorhergehenden § angezeigten Art fortrückt, d. h. ein Körper rAR hat für eine Abscisse, AQ, wo der erzeugende Kreis größer ist, als bei einer andern AP, ein größeres Bestreben, einen körperlichen Raum oder ein Solidum zu beschreiben, als für die Abscisse AP. Wir wollen dieses Bestreben, womit eine Fläche in einem gewissen Zustande einen körperlichen Raum beschreiben will, das Soliditätsbestreben nennen.

Wenn daher der Kreis, also auch der Halbmesser oder die Ordinate der Curve, wächst, so wird auch das Soliditätsbestreben wachsen, also der körperliche Raum mit Acceleration fließen, umgekehrt, mit Retardation. Soll also dieses Fließen mit Gleichförmigkeit geschehen, so darf die Ordinate weder wachsen, noch abnehmen, und die Curve ist daher hier die mit der Axe parallele grade Linie, deren Gleichung: $y = a$ ist, d. h. der Körper ist der gradstehende Cylinder. Die Kreisfläche ist hier $= a^2 \pi$, und der körperliche Raum s für die Abscisse x ist:

$$s = a^2 \pi x.$$

daher das constante Soliditätsbestreben:

$$= \frac{ds}{\Delta x} = a^2 \pi.$$

§. 227.

Lehrsatz.

Das Soliditätsbestreben eines Rotationskörpers in einem gewissen Zustande, ist gleich der

Fläche des erzeugenden Kreises für denselben Zustand.

Man denke sich zwei solche Körper auf eine gemeinschaftliche Abscisse, als Axe bezogen, so, daß der körperliche Raum SR Mm (Fig. 56.) des einen mit Gleichförmigkeit, der des andern AMm mit Ungleichförmigkeit, gleichviel, ob mit Acceleration, oder Retardation, fließt, daß ferner beide für eine und dieselbe Abscisse AP ein gleiches Soliditätsbestreben besitzen; so folgt aus dem vorhergehenden §, daß bei beiden Körpern an dieser Stelle der erzeugende Kreis, also auch die Ordinate beider Linien gemeinschaftlich seyn muß, d. h. ist die Linie AS = a, die Gleichung für die Curve AM: $y = \varphi(x)$, so ist hier $a = y$. Nun ist das Soliditätsbestreben des Cylinders $= a^2 \pi$, und da dieses nach der Voraussetzung für $a = y$ eben so groß seyn soll, als das des andern Körpers, so hat man für diesen das Soliditätsbestreben:

$$= y^2 \pi$$

= der Fläche des Kreises mM für die Abscisse AP.

§. 228.

Ist daher die Gleichung für die Curve AM gegeben:

$$y = \varphi(x),$$

und fingirt man die Gleichung zwischen dem körperlichen Raum AMm = s und der Abscisse x:

$$s = \psi(x),$$

so hat man:

$$\frac{ds}{\Delta x} = y^2 \pi, \text{ daher:}$$

$$s = \pi \int y^2 \Delta x = \pi \int \varphi(x)^2 \Delta x.$$

§. 229.

Es sey die krumme Linie ein Kreis, also der Körper eine Kugel, so hat man:

$$y = \sqrt{(r^2 - x^2)},$$

also

$$s = \pi \int (r^2 - x^2)\, \Delta x$$
$$= \pi r^2 x - \tfrac{1}{3} \pi x^3 + C.$$

Für $x = 0$ mag der körperliche Raum der Kugel anfangen, so ist also für diesen Werth $s = 0$, und daher auch Const. $= 0$. Für $x = r$ erhält man die Hälfte der Kugel:

$$= \tfrac{2}{3} \pi r^3,$$

also der Inhalt der ganzen Kugel:

$$= \tfrac{4}{3} \pi r^3.$$

Der körperliche Raum eines Cylinders, dessen erzeugender Kreis r zum Halbmesser hat, ist für die Abscisse x, $= r^2 \pi x$ und für $x = 2r$, $= 2\pi r^3$; folglich verhält sich der körperliche Raum eines um eine Kugel beschriebenen Cylinders zu dem der Kugel, wie 2 zu $\frac{4}{3}$, d. h. wie 3 zu 2.

§. 230.

Die Gleichung für die gemeine Parabel ist $y = \sqrt{bx}$, wenn die Axe AP (Fig. 57.) als Abscisse angenommen wird. Man hat daher:

$$s = \pi \int bx\, \Delta x = \frac{b\pi x^2}{2} + C.$$

Soll für $x = 0$ der körperliche Raum anfangen, so ist $C = 0$.

Nun ist aber:

$$\tfrac{1}{2} b \pi x^2 = \tfrac{1}{2} \pi y^2 x.$$

und $\pi y^2 x$ ist der Inhalt des Cylinders SRMm, woraus folgt, daß der durch Umdrehung der Parabel um ihre Axe entstandene Körper AMm halb so groß sey, als der Cylinder SRMm, welcher auf dem Kreise mM stehet und AP zur Höhe hat.

Wenn man die berührende AP (Fig. 58.) im Scheitel A der Parabel zur Axe annimmt, so ist die Gleichung der Parabel:

$$y = \frac{x^2}{b},$$

wo b der Parameter ist. Man hat daher:

$$s = \pi \int \frac{x^4}{b^2} \Delta x = \frac{\pi}{5b^2} x^5 + C.$$

Ist für $x = 0$ auch $s = 0$, so ist Const. $= 0.$, also:

$$s = \tfrac{1}{5} \pi \frac{x^5}{b^2} = \tfrac{1}{5} \pi \; y^2 x$$

$= \frac{1}{5}$ des Cylinders SMRn.

§. 231.

Eine Ellipse, deren halbe große Axe $= a$, halbe kleine Axe $= c$ ist, also durch die Gleichung:

$$y = \frac{c}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

ausgedrückt wird, drehe sich um ihre große Axe, so hat man:

$$s = \frac{\pi c^2}{a^2} \int (a^2 - x^2) \Delta x$$

$$= \frac{\pi c^2}{a^2} (a^2 x - \tfrac{1}{3} x^3) + C.$$

Soll für $x = 0$ auch $s = 0$ werden, so ist $C = 0$. daher:

$$s = \pi c^2 x - \tfrac{1}{3} \pi \frac{c^2 x^3}{a^2}.$$

Für $x = a$ erhält man das halbe elliptische Sphäroid:

$$= \pi a c^2 - \tfrac{1}{3} \pi a c^2 = \tfrac{2}{3} \pi a c^2,$$

daher der körperliche Raum des ganzen

$$= \tfrac{4}{3} \pi a c^2.$$

Nun ist aber $c^2 \pi$ die Kreisfläche GH oder CE (Fig. 59.), und $2 a c^2 \pi$ ist $=$ dem Cylinder CDFE, daher ist der körperliche Raum des Ellipsoids AHBG $= \frac{2}{3}$ des Cylinders CEFD.

Soll sich die Ellipse um die kleine Axe AC (Fig. 60.) drehen, so nehme man diese zur Abscisse, A zum Anfangspunct, und man erhält die Gleichung:

$$y = \frac{a}{c} \sqrt{(c^2 - x^2)},$$

wo wieder a die halbe große, c die halbe kleine Axe bedeutet. Will man daraus den körperlichen Raum des Ellipsoids finden, so hat man nur nöthig in dem oben gefundenen Ausdrucke a und c mit einander zu verwechseln, erhält also:

$$s = \pi a^2 x - \frac{1}{3} \pi \frac{a^2 x^3}{c^2}$$

also das ganze Ellipsoid, wenn man $x = c$ setzt, und mit 2 multiplicirt,

$$= \frac{4}{3} \pi a^2 c,$$

welches wieder $\frac{2}{3}$ des Cylinders BDFE ist. Es verhält sich daher der körperliche Inhalt des Ellipsoids, welches durch Umdrehung der Ellipse um die große Axe entstehet, zu dem desjenigen Körpers, welcher durch Umdrehung derselben Ellipse um die kleine Axe erzeugt wird, wie $\frac{4}{3} \pi a c^2$ zu $\frac{4}{3} \pi a^2 c$, d. h. wie c zu a, oder wie die kleine Axe zur großen Axe, der körperliche Raum des ersten ist also kleiner als der des anderen.

Ist $a = c$, so wird der Körper eine Kugel, und ihr Inhalt ist $= \frac{4}{3} \pi a^2 a = \frac{4}{3} \pi a^3$, wie auch oben gefunden wurde.

Es sey die Summe der beiden Axen $= a$, es entstehet die Frage, wie muß das Verhältniß beider Axen angenommen werden, damit der körperliche Raum des Ellipsoids ein Maximum sey. Es mag die Umdrehungs-Axe $= x$ seyn, so ist die andere $= a - x$, also das Ellipsoid $= \frac{4}{3} \pi \frac{x}{2} \frac{(a-x)^2}{4}$ $= s$, daher:

$$\frac{ds}{\Delta x} = \frac{1}{6} \pi \left(-2x(a-x) + (a-x)^2\right),$$

ist dies $= 0$, so hat man:

$$(a-x)^2 = 2x(a-x)$$

$$a - x = 2x \text{ und } x = \frac{1}{3} a,$$

d. h. die Umdrehungs-Axe muß die kleine Axe seyn, und da diese $\frac{1}{3} a$, die andere hingegen $\frac{2}{3} a$ ist, so folgt, daß die große Axe mal so groß, als die kleine angenommen werden muß.

§. 232.

Es drehe sich eine Hyperbel um die Axe AP (Fig. 61.), so wird der körperliche Inhalt des Conoids:

$$s = \pi \frac{c^2}{a^2} \int (2ax + x^2) \Delta x$$

$$= \frac{\pi c^2}{a} x^2 + \frac{c^2 \pi}{3a^2} x^3 + C,$$

wo C = o wird, wenn der körperliche Raum bei A anfangen soll. Also ist:

$$s = \frac{c^2 \pi}{a^2} (ax^2 + \frac{x^3}{3})$$

$$= \frac{1}{3} \frac{c^2 \pi}{a^2} (3ax^2 + x^3)$$

$$= \frac{1}{3} \frac{c^2 \pi}{a^2} (2ax + x^2) x + \frac{1}{3} \frac{c^2 \pi}{a} x^2$$

$$= \frac{1}{3} \pi y^2 x + \frac{1}{3} \frac{c^2 \pi}{a} x^2$$

$= \frac{1}{3}$ des Cylinders BMmC $+ \frac{1}{3} \frac{c^2 \pi}{a} x^2$.

Nun ist aber $\frac{1}{3}$ des Cylinders dem Kegel, welchen das Dreieck AMP beschreibt, folglich $\frac{1}{3} \frac{c^2 \pi}{a} x^2$ = dem körperlichen Raume, der durch das Segment MA beschrieben wird.

Wenn sich eine gleichseitige Hyperbel um eine ihrer Asymptoten drehet, so, daß man hier also die Gleichung $y = \frac{a^2}{x}$ gebraucht, wo a die Linie CB (Fig. 62.) bedeutet; so hat man:

$$s = a^4 \pi \int \frac{\Delta x}{x^2} = -\frac{a^4 \pi}{x} + C,$$

für x = a mag s = o seyn, so ist: $o = -a^3 \pi + C$, $C = a^3 \pi$ und

$$s = a^3 \pi - \frac{a^4 \pi}{x} = a^2 \pi (a - \frac{a^2}{x}) = a^2 \pi (a - y).$$

Nun ist aber $a^2 \pi$ = der Kreisfläche DC, macht man daher BF = a − y = BC − PM, so ist der körperliche Inhalt des Conoids CMmD = dem Cylinder CHGD. Je größer x wird, desto kleiner wird y, welches überhaupt jeden

Grad von Kleinheit erreichen kann, der Ausdruck $a - y$ nähert sich also beim fortgesetzten Fließen der Ordinate immer mehr der Größe a, und daher wird sich der ins Unendliche erstreckte körperliche Raum CMmD immer mehr dem des Cylinders CFED nähern, wenn $CF = CB = a$ ist, ohne ihn jedoch je erreichen zu können.

§. 233.

Drehet sich die logarithmische Linie um ihre Axe so hat man

$$y = e^x \text{ und } s = \pi \int e^{2x} \Delta x$$

$$= \frac{\pi e^{2x}}{2} + C.$$

Für $x = 0$, wo $y = 1 = AB$ ist, mag der Körper anfangen, so, daß also daselbst $s = 0$ wird, so hat man $0 = \frac{\pi}{2} + C$, $C = -\frac{1}{2}\pi$, folglich

$$s = \tfrac{1}{2}\pi(e^{2x} - 1) = \tfrac{1}{2}\pi(y^2 - 1).$$

Ist x negativ, so hat man:

$$s = \tfrac{1}{2}\pi(1 - y^2).$$

Von der Complanation der Oberflächen durch Rotation entstandener Körper.

§. 234.

Wenn sich ein Kreis mit veränderlichem Halbmesser parallel mit sich selbst so fort bewegt, daß der Mittelpunct desselben stets auf einer graden Linie bleibt, welche auf der Ebene des Kreises senkrecht stehet, also einen Rotationskörper beschreibt; so wird die Oberfläche desselben, die von dem Kreis-Umfange beschrieben wird, von der Abscisse als Gelegenheit, abhängen, oder eine Function derselben seyn, welche von der Function der Curve, deren Ordinaten die Halbmesser des Kreises sind, abhängen muß.

§. 235.

Lehrsatz.

Sollen zwei Rotationskörper in einem Zustande, wo der erzeugende Kreis Mm (Fig. 63) in beiden gemeinschaftlich ist, ein gleiches Bestreben, womit ihre Oberflächen fließen, d. h. ein gleiches Oberflächenbestreben hab'en; so müssen auch beide Curven NQ und RS, deren Ordinaten die Halbmesser der erzeugenden Kreise sind, in diesem Zustande PM ein gleiches Ordinatenbestreben oder eine gemeinschaftliche Tangente besitzen.

Denn je größer das Ordinatenbestreben der gegebenen Curve in M ist, d. h. je mehr die Ordinate oder der Radius bestrebt ist, zu fließen, zu wachsen, oder abzunehmen, desto mehr wird auch die die Oberfläche erzeugende Kreislinie mkMh zu wachsen, oder abzunehmen bestrebt seyn, weil sie sich mit dem Halbmesser proportional ändert, oder, welches einerlei ist, desto mehr wird diese Kreislinie bestrebt seyn, sich von ihrem Orte Mkmh zu entfernen, oder eine Fläche zu beschreiben, d. h. desto größer wird das Oberflächenbestreben seyn. Soll daher dieses bei zwei Oberflächen, welche für eine Abscisse AP den erzeugenden Kreis gemein haben, gleich seyn, so kann das Ordinatenbestreben der Curve NMQ und das der Curve RMS für den Punct M nicht verschieden von einander gedacht werden, d. h. beide Curven müssen in M eine gemeinschaftliche Tangente haben.

Wenn eine Curve MR (Fig. 64.) in M und R gleiches Ordinatenbestreben, oder eine gleiche Richtung der Tangente hat, so wird das Oberflächenbestreben in R, wo die Ordinate größer ist, auch größer seyn als in M, wo die Ordinate kleiner ist; denn es ist auch der Umfang des erzeugenden Kreises in R größer, als in M, und eine größere Linie hat ein größeres Flächenbestreben (§. 151.). Das Oberflächenbestreben eines Rotationskörpers hängt daher theils von dem Ordinatenbestreben, theils von der Ordinate selbst ab.

Damit also die Oberfläche eines Rotationskörpers mit Gleichförmigkeit fließe, oder dessen Oberflächenbestreben constant sey, muß entweder die Ordinate und zugleich das Or=

dinatenbestreben unveränderlich bleiben, oder, wenn die Ordinaten wachsen, muß das Ordinatenbestreben nach einem gewissen Gesetze abnehmen, so, daß sich beides in Absicht auf das Oberflächenbestreben aufhebt, oder endlich, wenn die Ordinaten abnehmen, muß das Ordinatenbestreben wachsen, und zwar so, daß dabei dasselbe wieder Statt findet. Im ersten Falle hat man den graden Cylinder, im zweiten Falle ein Conoid, wo die Curve concav wächst, im dritten ein solches, wo die Curve concav abnimmt. Die beiden letzten Fälle kann eine einzige Curve vereinigen, die wie die Ellipse erst concav wächst, dann concav wieder abnimmt.

Die Gleichung für die Oberfläche eines graden Cylinders ist:

$$s = 2a\pi x,$$

wo a die constante Ordinate der graden Linie bedeutet, das constante Oberflächenbestreben ist daher $= 2a\pi$. Will man nun diese gleichförmig fließende Oberfläche mit einer ungleichförmigen vergleichen, und zu dem Zwecke annehmen, daß beide auf eine gemeinschaftliche Abscisse bezogen sind, und für einen gewissen Werth derselben den erzeugenden Kreis und das Oberflächenbestreben gemein haben; so siehet man sogleich, daß diese gleichförmig fließende Fläche zu der Vergleichung nicht geeignet ist, denn wenn auch die Ordinate PM (Fig. 64.) gemeinschaftlich ist, so wird doch das Ordinatenbestreben in M nur in dem Falle bei beiden Linien dasselbe seyn, wenn sich die Ordinate der Curve PM grade im Zustande des Maximi befindet, und folglich kann im Allgemeinen das Oberflächenbestreben bei beiden nicht dasselbe seyn.

Das Conoid, dessen Oberfläche mit Gleichförmigkeit fließt, ist noch unbekannt, und so scheint sich diese Untersuchung auf den ersten Anblick der wissenschaftlichen Betrachtung zu entziehen; allein es ist gar nicht erfoderlich, zur Vergleichung der Fluenten jedesmal eine gleichförmige zu nehmen, (§. 124.) es kann in der That eine jede beliebige seyn, wenn nur ihr Gesetz bekannt ist, so, daß man im Stande ist das Bestreben durch Differentiation abzuleiten.

§. 236.

Lehrsatz.

Das Oberflächenbestreben eines beliebigen Rotationskörpers für eine gewisse Abscisse AP (Fig. 66.) ist gleich der Normale der Curve AM für denselben Zustand, multiplicirt mit 2π.

Wenn AMm ein grader Kegel, AP $= x$ die Axe desselben und der Winkel MA P $= \varphi$ ist, so ist aus der Elementargeometrie bekannt, daß die Oberfläche des Kegels =

$$s = \pi \text{ Tang} \varphi \text{ Sec.} \varphi . x^2$$

ist; man hat daher:

$$\frac{ds}{\Delta x} = 2\pi \text{ Tang} \varphi \text{ Sec.} \varphi . x.$$

Da nun Sec. $\varphi . x =$ AM, also Tang φ. Sec. $\varphi . x =$ AV ist, wenn MV senkrecht auf AM stehet; so hat man 2π MV = dem Oberflächenbestreben des graden Kegels.

Zur Vergleichung einer Fluente dieser Art mit einer bekannten ist die Oberfläche des graden Kegels geeignet, denn es ist bei jedem Rotationskörper mAM (Fig. 66.) für eine beliebige Abscisse AP jederzeit zu bewirken, daß der Kegel mBM und der Körper mAM nicht allein den erzeugenden Kreis mM, sondern auch das Ordinatenbestreben in M gemeinschaftlich haben, indem BM nur als Berührende der Curve AM angenommen zu werden braucht.

Macht man daher die Voraussetzung, daß beide Körper für die Abscisse AP, wo in beiden der erzeugende Kreis mM gemeinschaftlich ist, ein gleiches Oberflächenbestreben haben; so ist BM die Berührende der Curve in M, und MV, welche senkrecht auf BM stehet, also mit 2π multiplicirt, das Oberflächenbestreben des Kegels für die Abscisse AP, daher auch der Annahme gemäß, das des Rotationskörpers für dieselbe Abscisse ausdrückt, ist die Normale der Curve AM im Puncte M, oder für die Abscisse AP.

§. 237.

Hat man daher die Gleichung für eine Curve:

$$y = \varphi (x)$$

und will daraus die Gleichung für die Oberfläche z des aus der Curve entstehenden Körpers ableiten, so kann man sie als von x abhängig fingiren:

$$z = \psi(x).$$

Da nun das Oberflächenbestreben der Normale der Curve multiplicirt mit 2 gleich ist, so hat man

$$\frac{dz}{\Delta x} = 2\pi y \sqrt{(1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2})}. \text{ §. 133.}$$

daher:

$$z = 2\pi \int y \sqrt{(1 + \frac{dy^2}{\Delta x^2})}\, \Delta x$$
$$= 2\pi \int y\, ds.$$

Jetzt ist es also leicht, die Gleichung derjenigen Curve zu finden, deren Rotationskörper ein constantes Oberflächenbestreben besitzt, aber wo die Oberfläche mit Gleichförmigkeit fließt. In der That, man braucht nur die Curve zu finden, deren Normale constant ist, welches nach §. 140. der Kreis ist, so, daß also die Oberfläche der Kugel mit der Abscisse gleichförmig fließt. Ist der Radius des Kreises = r, so ist auch sie Normale = r, und das Oberflächenbestreben

$$\frac{dz}{\Delta x} = 2\pi r \text{ also } z = 2\pi r x$$

setzt man x = 2 r, so erhält man die Oberfläche der ganzen Kugel $= 4\pi r^2$, wie auch aus der Elementargeometrie bekannt ist.

§. 238.

Für die Parabel hat man: $y = \sqrt{bx}$, daher:

$$z = 2\pi \int \sqrt{bx}. \sqrt{(1 + \frac{1}{4}\frac{b}{x})}\, \Delta x$$
$$= 2\pi \int \sqrt{(bx + \frac{1}{4}b^2)}\, \Delta x$$
$$= \frac{4\pi\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + bx)^3}}{3b} = \frac{\pi\sqrt{(b^2 + 4bx)^3}}{6b} + C.$$

Für x = o mag die Oberfläche anfangen, so ist:

$$o = \frac{\pi}{6b} b^3 + C,\ C = -\frac{1}{6}\pi b^2,$$

folglich:

$$z = \tfrac{1}{6}\pi\left(\frac{\sqrt{(b^2 + 4bx)^3}}{b} - b^2\right).$$

Es drehe sich die Parabel um die grade Linie, durch welche sie im Scheitel berührt wird, so hat man:

$$y = \frac{x^2}{b},$$

wo b der Parameter ist, folglich ist:

$$z = 2\pi \int y \sqrt{\left(1 + \frac{4x^2}{b^2}\right)} \, \Delta x.$$

Da nun aber $dy = \frac{2x}{b} \Delta x$, daher $\Delta x = \frac{b.dy}{2x}$ $= \frac{1}{2} dy \sqrt{\frac{b^2}{x^2}} = \frac{1}{2} dy \sqrt{b} . \sqrt{\frac{b}{x^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{y}} . dy$ ist, so hat man:

$$\begin{aligned} z &= 2\pi \int y \sqrt{\left(1 + \frac{4y}{b}\right)} \, \tfrac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{b}{y}\right)} \, dy \\ &= \pi \int y \sqrt{\left(\frac{b}{y} + 4\right)} \, dy \\ &= \pi \int \sqrt{(by + 4y^2)} \, dy \\ &= \pi \left(\tfrac{1}{2} y + \tfrac{1}{16} b\right) \sqrt{(by + 4y^2)} \\ &\quad - \tfrac{1}{32} \pi b^2 \int \frac{dy}{\sqrt{(by + 4y^2)}}. \end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(by + 4y^2)}} = \tfrac{1}{2} \log \frac{\sqrt{(by + 4y^2)} + 2y}{\sqrt{(by + 4y^2)} - 2y}$$

oder auch:

$$= \tfrac{1}{2} \log \frac{8y + b + 4\sqrt{(by + 4y^2)}}{b}$$

folglich:

$$\begin{aligned} z &= \pi \left(\tfrac{1}{2} y + \tfrac{1}{16} b\right) \sqrt{(by + 4y^2)} \\ &\quad - \tfrac{1}{64} \pi b^2 \log \frac{\sqrt{(by + 4y^2)} + 2y}{\sqrt{(by + 4y^2)} - 2y} + C \\ &= \pi \left(\tfrac{1}{2} y + \tfrac{1}{16} b\right) \sqrt{(by + 4y^2)} \\ &\quad - \tfrac{1}{64} \pi b^2 \log \frac{8y + b + 4\sqrt{(by + 4y^2)}}{b} + C. \end{aligned}$$

Für $y = o$ mag auch $z = o$ seyn, daher ist auch für den letzten Ausdruck const. $= o$.

§. 239.

Soll sich eine Ellipse um ihre große Axe drehen, und nimmt man diese zur Abscisse, den Mittelpunct als Anfangspunct an, so ist:

$$y = \frac{c}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

wenn a die halbe große, c die halbe kleine Axe bedeutet. Daher hat man:

$$\frac{dy}{x} = - \frac{c}{a} \frac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}},$$

folglich:

$$z = 2\pi \int y \sqrt{(1 + \frac{c^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)})} \triangle x$$

$$= \frac{2\pi c}{a} \int \sqrt{((a^2 - x^2) + \frac{c^2}{a^2} x^2)} \triangle x$$

$$= \frac{2c\pi}{a} \int \sqrt{(a^2 + (\frac{c^2}{a^2} - 1) x^2)} \triangle x$$

$$= 2c\pi \int \sqrt{(1 + \frac{c^2 - a^2}{a^4} x^2)} \triangle x$$

$$= 2c\pi \int \sqrt{(1 - \frac{a^2 - c^2}{a^4} x^2)} \triangle x.$$

Nennt man nun $\sqrt{(\frac{a^2 - c^2}{a^2})} = e$, so hat man:

$$z = 2c\pi \int \sqrt{(1 - \frac{e^2}{a^2} x^2)} \triangle x$$

$$= c\pi . x \sqrt{(1 - \frac{e^2}{a^2} x^2)} + c\pi \int \frac{\triangle x}{\sqrt{(1 - \frac{e^2}{a^2} x^2)}}$$

$$= c\pi x . \sqrt{(1 - \frac{e^2}{a^2} x^2)}$$

$$+ \frac{ac\pi}{e} \text{Arc. Sin.} \frac{ex}{a} + C,$$

wo die Constante $= o$ wird.

Setzt man Arc. Sin $\frac{ex}{a} = \varphi$, so, daß man hat: $\mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{ex}{a}$ und $\mathrm{Cos}\,\varphi = \sqrt{(1 + \frac{e^2}{a^2} x^2)}$ so ist:

$$z = \frac{c\pi a}{e}\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \frac{ac\pi}{e}\,\varphi$$

$$= \frac{ca\pi}{2e}\,(\mathrm{Sin}\,2\varphi + 2\varphi).$$

Setzt man: $x = a$, so erhält man die Oberfläche des halben Ellipsoids:

$$= c\pi a\sqrt{(1 - e^2)} + \frac{ac\pi}{e}\,\mathrm{Arc.\,Sin}\,e$$

$$= c\pi a\,(\frac{c}{a} + \frac{1}{e}\,\mathrm{Arc.\,Sin}\,e).$$

Zweites Capitel.

Von der Mechanik.

Begriff von Bewegung. Allgemeines Princip.

§. 240.

Ein Körper bewegt sich, wenn er seinen Ort im Raume verändert. Die Bewegung ist absolut, wenn nur auf den Raum an sich, und auf das Fortrücken in diesem Raume Rücksicht genommen wird; sie ist relativ, wenn die Veränderung des Orts in Beziehung auf andere Körper geschiehet. Nur relative Bewegung kann wahrgenommen werden.

Der durch einen Körper oder einen Punct beschriebene Raum ist eine Fluente, wenn die Bewegung gesetzmäßig geschiehet, d. h. wenn es eine feste Regel giebt, nach welcher die Größe des beschriebenen Raums mit der Zeit, als Gelegenheit zu fließen, verändert wird.

§. 241.

Grundsatz.

Wenn man sich alle äußeren Ursachen, welche auf einen leblosen Körper im Raume wirken können, als nicht vorhanden, d. h. sich den Raum als absolut leer denkt; so wird der Körper an dem ihn ursprünglich angewiesenen Orte verharren müssen, bis ihn etwas zwingt, diesen Zustand der Ruhe zu verlassen. Er wird also in Bewegung gesetzt, nimmt eine ihm ertheilte Richtung an, welcher er unabänderlich folgt, und zwar stets die Geschwindigkeit, welche er ursprünglich erhielt, beibehaltend. In diesem Zustande wird er wieder so lange bleiben müssen, bis ihn eine äußere Ursache zwingt, denselben zu verlassen.

Dieses ist das berühmte Gesetz der Trägheit, welches man schicklicher das Princip der Leblosigkeit nennen könnte.

I. Von der gradlinigen Bewegung.

Soll sich ein Körper in einer graden Linie fortbewegen, so, daß das Beschreiben des Raums nach einem gewissen Gesetze geschiehet, d. h. daß der Raum s eine von der Zeit t, als Gelegenheit, abhängige Fluente ist; so kann dieses natürlich auf unzählig mannigfaltige Weise geschehen, je nachdem man $s = \varphi(t)$ annimmt.

Es ist jedoch einleuchtend, da man den Raum betrachtet, welchen ein Körper oder Punct wirklich beschreibt, daß das Wachsen des Raums mit dem Wachsen der Zeit unzertrennlich verbunden sey, daß also auch nur solche Functionen von t als Gesetz einer Bewegung angenommen werden können, und daß z. B. eine Bewegung, deren Gleichung $s = \frac{a}{t}$ ist, als widersinnig angesehen werden muß. Ferner soll das Beschreiben eines Raums erst da anfangen, wo die dazu bestimmte Zeit beginnt, denn, wenn noch keine Zeit verflossen ist, kann auch noch kein Raum beschrieben seyn; die Functionen müssen also so beschaffen seyn, daß für $t = 0$ auch $s = 0$ wird.

§. 242.

Die gleichförmige gradlinige Bewegung wird durch die Gleichung:

$$s = at$$

ausgedrückt, wo t die Zeit, s den Raum bedeutet. Die Geschwindigkeit wird man hier dadurch erkennen, wenn man den Raum s mit der Zeit t, in welcher er beschrieben wurde, vergleicht, oder, welches einerlei ist, wenn man den Raum angiebt, welcher in der Zeit-Einheit beschrieben wird. Demnach zeigt in der Gleichung $s = at$, a die constante Größe der Geschwindigkeit an.

Zu dieser Bewegung bedarf es nur einer anfänglichen bewegenden Ursache, welche dem Körper oder Puncte eine gewisse Geschwindigkeit und Richtung ertheilt; denn nach obigem allgemeinen Principe wird der in Bewegung gesetzte Körper beides stets beibehalten. Soll aber die Bewegung nicht gleichförmig geschehen, soll die Geschwindigkeit noch veränderlich seyn, oder selbst noch fließen; so ist in jedem Augenblicke während der Bewegung noch ein gewisses Bestreben erfoderlich, welches den Geschwindigkeitszustand abändert.

Entwickelung der Grundformen der gesammten höheren Mechanik. Folgerungen.

§. 243.

Ist eine gesetzmäßige gradlinige Bewegung durch die Gleichung $s = \varphi(t)$ dargestellt, so ist das Bestreben, womit der Raum s wachsen will, oder die Tendenz desselben, sich schneller, oder langsamer zu vergrößern, nichts anders, als die Geschwindigkeit des beschreibenden Puncts.

Ist diese Geschwindigkeit nicht immer dieselbe, oder das Wachsen des Raums nicht gleichförmig, welches nach dem Princip der Trägheit ohne eine äußere Einwirkung geschiehet, so ist nach dem obigen in jedem Augenblicke während der Bewegung ein Bestreben thätig, den Geschwindigkeitszustand abzuändern, d. h. ein Bestreben, einen Körper aus seinem Zustande im Raume, sey es der Zustand der Ruhe, oder der Bewegung, herauszureißen, und dieses ist es, was man gewöhnlich **Kraft** zu nennen pflegt. Kraft ist also das Bestreben, den Geschwindigkeitszustand abzuändern, oder das Bestreben, womit die Geschwindigkeit fließt.

Ist daher das Gesetz für eine gradlinige Bewegung:

$$s = \varphi(t),$$

so ist die Geschwindigkeit, oder das Bestreben, womit s fließt, =

$$c = \frac{ds}{\Delta t}$$

und die Kraft, welche in irgend einem Zustande von s, oder nach Verlauf irgend einer Zeit thätig ist, d. h. das Bestreben, womit c fließt: =

$$v = \frac{dc}{\Delta t} = \frac{d^2 s}{\Delta t^2}.$$

§. 244.

Man betrachtet also bei jeder Bewegung vier Größen, die Zeit t, den Raum s, die Geschwindigkeit c, und die Kraft v. Ist die Beziehung von zwei dieser Größen gegeben, so ist es durch die beiden Gleichungen $c = \frac{ds}{\Delta t}$ und $v = \frac{dc}{\Delta t}$ immer möglich, die beiden andern darzustellen.

Verbindet man von den vier Größen t, s, c, v, immer je zwei, um sich unter diesen eine Beziehung zu denken, so kann dieses auf $\frac{4 \cdot 3.}{1. 2.} = 6$ verschiedene Arten geschehen, und die Combinationen selbst sind: ts, tc, tv, sc, sv, cv. Nach der ersten Verbindung, nämlich ts, ist s als Function von t gegeben, $s = \varphi(t)$, es wird gefodert, die beiden anderen Größen c und v gleichfalls als Functionen von t darzustellen. Hiezu dienen die beiden Fundamentalgleichungen selbst; es ist $c = \frac{ds}{\Delta t}$, $v = \frac{d^2 s}{\Delta t^2}$, oder:

$$c = \frac{d\varphi(t)}{\Delta t},\ v = \frac{d^2\varphi(t)}{\Delta t^2}.$$

2. Nach der Verbindung tc ist c als Function von t gegeben:

$$c = \varphi(t),$$

Geschwindigkeit ist Function der Zeit; man sucht s und v. Da $c = \frac{ds}{\Delta t}$ oder $ds = c\,\Delta t$ ist, so hat man:

$$s = \int c\,\Delta t = \int \varphi(t)\,\Delta t + C.$$

Da ferner $v = \frac{dc}{\Delta t}$ ist, so hat man:

$$v = \frac{d\varphi(t)}{\Delta t}.$$

3. Nach der Verbindung tv ist v als Function von t gegeben:

$$v = \varphi(t)$$

man sucht c und s. Da $v = \frac{dc}{\Delta t}$ so hat man:

$$c = \int v\,\Delta t = \int \varphi(t)\,\Delta t + C.$$

Da ferner $\frac{ds}{\Delta t} = c = \int \varphi(t)\,\Delta t + C$, so hat man:

$$s = \int\left(\int \varphi(t)\,\Delta t + C\right) + \text{Const.}$$

4. Nach der Combination sc ist c als Function von s bekannt:

$$c = \varphi(s),$$

es wird v und t gesucht.

Man hat: $c = \frac{ds}{\Delta t}$ daher: $\Delta t = \frac{ds}{c} = \frac{ds}{\varphi(s)}$ und

$$t = \int \frac{ds}{\varphi(s)} + C.$$

Ferner ist

$$v = \frac{dc}{\Delta t} = \frac{d\varphi(s).\,\varphi(s)}{ds}.$$

5. Nach der Verbindung s v ist v als Function von s gegeben:

$$v = \varphi (s),$$

man sucht c und t.

Es ist:

$$v = \frac{dc}{\Delta t} = \varphi (s) \text{ und}$$

$$c = \frac{ds}{\Delta t} \text{ also } \frac{v}{c} = \frac{dc}{ds} = \text{ daher:}$$

$$c\,dc = v\,ds = \varphi (s)\,ds,\ \tfrac{1}{2} c^2 = \int \varphi (s)\,ds$$

$$c = \sqrt{(2 \int \varphi (s)\,ds)}.$$

Da ferner

$$c = \frac{ds}{\Delta t} \text{ also } t = \int \frac{ds}{c} \text{ ist,}$$

so hat man:

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{(2 \int \varphi (s)\,ds)}}.$$

Endlich ist nach der sechsten Verbindung v c v als Function der Geschwindigkeit c gegeben, $v = \varphi (c)$ man sucht s und t. Man hat:

$$v = \frac{dc}{\Delta t} \text{ also } t = \int \frac{dc}{v} = \int \frac{dc}{\varphi (c)},$$

ferner ist:

$$\frac{ds}{\Delta t} = c, \text{ folglich } s = \int c \,\Delta t = \int \frac{c\,dc}{\varphi (c)}.$$

Gradlinige Bewegung eines Körpers oder Puncts, welche durch Einwirkung einer constanten Kraft entstehet.

§. 245.

Nimmt man in Beziehung auf die Kraft den einfachsten Fall an, daß sie nämlich constant, = a, sey, so hat man:

$$\frac{dc}{\Delta t} = a,\ c = at + C.$$

Ist die Geschwindigkeit c da, wo die Bewegung anfangen soll, also für t = o, = b, so hat man:

$$c = at + b.$$

Da nun ferner:

$$c = \frac{ds}{\Delta t}, \text{ so hat man:}$$

$$ds = c \Delta t = at \Delta t + b \Delta t$$

$$= \frac{a}{2} t^2 + bt + C.$$

Da für $= o$ auch $s = o$ werden soll, so wird auch die Constante $= o$. Daher ist:

$$s = \tfrac{1}{2} at^2 + bt.$$

Soll die Geschwindigkeit im Anfange der Zeit $= o$ seyn, so hat man:

$$c = at \text{ und } s = \tfrac{1}{2} at^2.$$

Nennt man eine Kraft, welche in der Richtung der Geschwindigkeit selbst wirkt, positiv, so wird man die Kraft, welche in der entgegengesetzten Richtung thätig ist, negativ nennen müssen. Macht man daher die Voraussetzung, die Kraft a wirke gegen die Bewegung, so ist sie $= - a$, und folglich hat man:

$$\frac{dc}{\Delta t} = - a$$

$$c = - at + C.$$

Hier wird die Constantenbestimmung nöthig, es muß für $t = o$ d. h. im Anfange der Zeit schon eine gewisse Geschwindigkeit Statt gefunden haben, indem sonst bei der Kraft $- a$ gar keine Bewegung nach der ursprünglichen Richtung vor sich gehen könnte. Diese Geschwindigkeit sey $= b$, so hat man $C = b$, und daher:

$$c = b - at.$$

Da nun dieses $= \frac{ds}{\Delta t}$ ist, so hat man:

$$ds = (b - at) \Delta t$$

$$s = bt - \tfrac{1}{2} at^2 + C,$$

wo $C = o$ ist, da für $t = o$ auch $s = o$ seyn soll.

Diese Formeln lehren, daß bei einer constanten Kraft die Räume mit den Quadraten der Zeiten zunehmen. Umgekehrt, hätte man

$$s = at^2 + bt + g,$$

so ist:

$$c = 2at + b$$

und

$$v = 2a,$$

d. h. diejenige Kraft, welche verursacht, daß der durch sie bewegte Körper Räume beschreibt, welche mit den Quadraten der Zeiten wachsen, eine constante Kraft sey.

Der Erfahrung gemäß, nimmt jeder Körper, welcher frei durch die Schwerkraft zur Erde getrieben wird, diese Bewegung an, und folglich könnte man den Rückschluß machen, daß die Schwerkraft der Erde eine constante Kraft sey. Obgleich dieses jedoch im Allgemeinen nicht der Fall ist, so ist man doch berechtigt, es für eine geringe Nähe an der Oberfläche der Erde anzunehmen.

§. 246.

Wenn ein Körper von einer Höhe herabfällt, und die Kraft der Erde = a heißt, so ist der Ausdruck für die Geschwindigkeit:

$$c = at$$

der für den Raum:

$$s = \tfrac{1}{2}\, at^2.$$

Weiß man nun den Raum, welchen der Körper in der Zeit-Einheit, wofür man eine Secunde annimmt, zurücklegt, so findet man dadurch die Kraft der Schwere a. Diesen Raum hat man durch Beobachtung = 15,094 pariser Fuß oder 15,625 rheinl. Fuß gefunden, und folglich ist indem man für s = 15,094 pariser Fuß für t = 1 substituirt,

$$15{,}094 = \tfrac{1}{2}\, a \text{ also}$$
$$a = 30{,}188 \text{ pariser Fuß},$$

und daher hat man für die Bewegung eines frei fallenden Körpers das Gesetz:

$$s = 15{,}094 . t^2,\ c = 30{,}188 . t.$$

Man hat für die Zahl 15,094 das Zeichen g eingeführt, so, daß nach dieser Bezeichnung:

$$s = gt^2,\ c = 2gt,\ v = 2g \text{ ist}.$$

Die Formeln

$$s = gt^2,\ c = 2gt,\ v = 2g$$

gehören für den freifallenden Körper; die Formeln:

$$s = bt - gt^2,\ c = b - 2gt,\ v = -2g,$$

für den mit einer Geschwindigkeit $= b$ aufwärts getriebenen Körper, endlich die Formeln:

$$s = = bt + gt^2,\ c = b + 2gt,\ v = 2g$$

gehören für den fallenden Körper, welcher im Anfange der Bewegung oder des Fallens schon eine gewisse Geschwindigkeit b in der Richtung der Kraft erhalten hatte.

§. 247.

Will man die Kraft der Schwere als Einheit für alle übrigen Kräfte annehmen, wie es zu geschehen pflegt, so wird man jede beliebige Kraft v auf diese Einheit zurückbringen, wenn man sie durch 2g dividirt. Hat man daher:

$$v = \frac{dc}{\Delta t}$$

und nimmt man v in Bezug auf ihre Einheit, so erhält man:

$$v = \frac{dc}{2g\Delta t}.$$

Man kann auch anstatt einer beliebigen Geschwindigkeit die Höhe angeben, durch welche ein Körper frei fallen müßte, um dieselbe zu erlangen.

Man hat nämlich:

$$c = 2gt \text{ also } t = \frac{c}{2g}.$$

Da nun: $s = gt^2$ ist, so hat man jetzt:

$$s = \frac{c^2}{4g}.$$

Den Raum s, durch welchen ein Körper frei fallen muß, damit er die Geschwindigkeit c erlange, nennt man die Fallhöhe, und pflegt dieselbe durch h zu bezeichnen.

Man hat daher:

$$h = \frac{c^2}{4g}, \text{ und also } c = 2\sqrt{gh},$$

durch welche Formeln man leicht Geschwindigkeit in die Fallhöhe und umgekehrt diese in die Geschwindigkeit verwandeln kann.

Bewegung eines Körpers, welche durch Einwirkung einer veränderlichen Kraft entstehet.

§. 248.

Es werde jetzt angenommen, die Kraft sey nicht mehr constant, sie ändere sich gesetzmäßig mit dem Raume, werde also als Function des Raums gedacht, so, daß man habe:

$$v = \varphi(s).$$

Nehmen wir an, die Erde besitze eine anziehende Kraft, welche sich immer schwächer äußert, je weiter sich der Körper vor ihrem Mittelpuncte entfernt, und zwar, daß sich die Kraft an verschiedenen Puncten außerhalb der Erde umgekehrt verhalte, wie die Quadrate der Entfernungen vom Mittelpuncte; so wird sich, angenommen, diese Kraft sey an der Oberfläche der Erde $= 2g$, die Kraft v in M (Fig. 67.) zu der in A, d. h. zu $2g$ verhalten, wie CA^2 zu CM^2. Nennt man die Entfernung $CB = a$, $BM = s$ und $CA = r$, so ist $CM = a - s$, also ist:

$$\frac{v}{2g} = \frac{r^2}{(a-s)^2},\ v = \frac{2gr^2}{(a-s)^2}.$$

Hier ist nun also die Kraft als Function des Raumes gegeben, man sucht die Geschwindigkeit c und die Zeit t, welches durch die beiden Formeln Nr. 5. §. 244.

$$c = \sqrt{(2\int v\,ds)} \text{ und } t = \int \frac{ds}{\sqrt{(2\int v\,ds)}}$$

geschehen kann.

Man hat daher

$$1,\ c = \sqrt{\left(2\int \frac{2gr^2\,ds}{(a-s)^2}\right)} = 2\sqrt{\left(g\left(\frac{r^2}{a-s} + \text{const.}\right)\right)},$$

für $s = 0$ sey auch $c = 0$, d. h. in B fange die Bewegung an, so ist

$$0 = 2\sqrt{g\left(\frac{r^2}{a} + C\right)},\ C = -\frac{r^2}{a},$$

daher

$$c = 2\sqrt{\left(g\left(\frac{r^2}{a-s} - \frac{r^2}{a}\right)\right)} = 2r\sqrt{\frac{gs}{a(a-s)}},$$

welche Formel den Zusammenhang zwischen Raum und Geschwindigkeit darstellt.

Es ist noch übrig, die Relation zu finden, welche zwischen der Zeit und dem Raume Statt haben muß. Hier ist:

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{(2\int v\,ds)}},$$

und da wir oben fanden:

$$\sqrt{(2\int v\,ds)} = 2r\sqrt{\left(\frac{gs}{a(a-s)}\right)},$$

so hat man

$$t = \frac{1}{2r}\int \frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{gs}{a(a-s)}\right)}} = \frac{1}{2r}\int \sqrt{\left(\frac{a^2-as}{gs}\right)}\,ds$$

$$= \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{a}{g}}.\int\sqrt{\left(\frac{a-s}{s}\right)}\,ds.$$

Um die Integration zu vollführen setze man $\sqrt{\frac{a-s}{s}} = z$, so ist $s = \frac{a}{1+z^2}$, $ds = -\frac{2az\Delta z}{(1+z^2)^2}$ folglich hat man, wenn man diese Werthe substituirt:

$$t = -\frac{1}{2r}\sqrt{\frac{a}{g}}\int\frac{2az^2\Delta z}{(1+z^2)^2} = -\frac{a}{r}\sqrt{\frac{a}{g}}\int\frac{z^2\Delta z}{(1+z^2)^2}.$$

Wendet man hier die Formel

$$\int Q\,dP = QP - \int P\,dQ$$

an, so ist

$$\int\frac{\Delta z}{1+z^2} = \frac{z}{1+z^2} + 2\int\frac{z^2\Delta z}{(1+z^2)^2} = \text{Arc. Tang}\, z,$$

folglich hat man:

$$\int\frac{z^2\Delta z}{(1+z^2)^2} = \tfrac{1}{2}\,\text{Arc. Tang}\, z - \tfrac{1}{2}\,\frac{z}{1+z^2}$$

also:

$$t = -\frac{a}{2r}\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\text{Arc. Tang}\, z - \frac{z}{1+z^2}\right)$$

$$= \frac{a}{2r}\sqrt{\frac{a}{g}}.\,\frac{z}{1+z^2} - \frac{a}{2r}\sqrt{\frac{a}{g}}\,\text{Arc. Tang}\, z.$$

Für z den Werth $\sqrt{\frac{a-s}{s}}$ gesetzt, hat man:

$$t = \frac{a}{2r}\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{a-s}{s}}}{1+\frac{a-s}{s}} - \frac{a}{2r}\sqrt{\frac{a}{g}}\ \text{Arc. Tang}\sqrt{\frac{a-s}{s}} + C.$$

Um die Constante zu determiniren, setze man $t = 0$, so ist auch $s = 0$, also ist

$$0 = C - \frac{a}{2r}\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \text{Arc. Tang}\sqrt{\frac{a}{0}}$$

$$C = \frac{a}{2r}\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \tfrac{1}{2}\pi,$$

und daher:

$$t = \frac{a}{2r}\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \left(\frac{\sqrt{(as-s^2)}}{a} - \text{Arc. Tang}\sqrt{\frac{a-s}{s}} + \tfrac{1}{2}\pi\right)$$

$$= \frac{a}{2r}\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \left(\frac{\sqrt{(as-s^2)}}{a} + \text{Arc. Cot.}\sqrt{\frac{a-s}{s}}\right).$$

Dieses ist also der Zusammenhang zwischen Zeit und Raum bei der allgemein angenommenen Schwerkraft.

Von der gradlinigen Bewegung in widerstehenden Mitteln.

§. 249.

Es bewege sich ein fester Körper, von dessen Gestalt hier übrigens ganz abstrahirt wird, in einem flüssigen, z. B. in der Luft, oder im Wasser; so wird derselbe dadurch einen Widerstand erfahren, er wird an Geschwindigkeit verlieren müssen. Je größer die Geschwindigkeit des bewegten Körpers ist, desto mehr Theile des flüssigen wird er in einerlei Zeit aus dem Wege drängen müssen, und mit desto größerer Geschwindigkeit wird dieses geschehen. Die widerstehende Kraft des Mittels wird also von der Geschwindigkeit des Körpers abhängen, oder eine Function derselben seyn. Bedeuten also t, s, c, v wie vorher Zeit, Raum, Geschwindigkeit, Kraft, so hat man

$$v = \varphi(c)$$

als gegeben, und die hier zu lösenden Aufgaben können nur seyn, s durch t auszudrücken.

Um zuerst t durch c darzustellen, hat man

$$v = \frac{dc}{\Delta t} = \varphi(c) \text{ also}$$

$$t = \int \frac{dc}{\varphi(c)} = \int \frac{dc}{v}$$

ferner:

$$\frac{ds}{\Delta t} = \frac{ds\,\varphi(c)}{dc} = c,$$

daher:

$$s = \int \frac{c\,dc}{\varphi(c)} = \int \frac{c\,dc}{v}.$$

§. 250.

Es werde diejenige Geschwindigkeit, bei welcher die Kraft des Widerstandes so groß als die Schwerkraft an der Oberfläche der Erde, also $= 2g$ ist, durch f dargestellt, und vorausgesetzt, es verhalte sich der Widerstand wie das Quadrat der Geschwindigkeit, welche Annahme für die Wirklichkeit die einzig reelle ist, so hat man, wenn v die Kraft des Widerstandes bei der Geschwindigkeit c ist,

$$\frac{v}{2g} = \frac{c^2}{f^2}.$$

Diese Kraft ist der Bewegung hinderlich und der Richtung nach grade entgegengesetzt, muß also negativ genommen werden; daher hat man

$$v = -\frac{2gc^2}{f^2},$$

als die gegebene Function der Geschwindigkeit. Substituirt man diesen Ausdruck in die oben gefundene Formel, so ist

$$t = -\frac{f^2}{2g}\int\frac{dc}{c^2} = \frac{f^2}{2gc} + C.$$

Im Anfange der Zeit muß schon eine gewisse Geschwindigkeit $= a$ Statt gefunden haben, also ist

$$o = \frac{f^2}{2ga} + C, \; C = -\frac{f^2}{2ga},$$

daher:

$$t = \frac{f^2}{2gc} - \frac{f^2}{2ga}.$$

Kehrt man diese Gleichung um, so erhält man die Relation zwischen c und t:

$$\frac{f^2}{2gc} = t + \frac{f^2}{2ga}$$

$$c = \frac{f^2}{2g\left(t + \frac{f^2}{2ga}\right)} = \frac{af^2}{2gat + f^2}.$$

Um die Gleichung zwischen Raum und Geschwindigkeit zu erhalten, fanden wir oben allgemein

$$s = \int \frac{c\,dc}{\varphi(c)}, \text{ also ist}$$

$$s = -\frac{f^2}{2g}\int\frac{dc}{c} = -\frac{f^2}{2g} \operatorname{lognat} c + C.$$

Für s = o sollte die Geschwindigkeit = a seyn, folglich hat man:

$$o = -\frac{f^2}{2g} \log\operatorname{nat} a + C, \text{ also}$$

$$C = \frac{f^2}{2g} \log\operatorname{nat} a.$$

folglich:

$$s = \frac{f^2}{2g} (\log a - \log c) = \frac{f^2}{2g} \log\frac{a}{c}.$$

Man kann diesen Ausdruck umkehren, indem man c durch s ausdrückt.

$$\log\frac{a}{c} = \frac{2g}{f^2}s$$

$$e^{2gs:f^2} = \frac{a}{c}$$

$$c = \frac{a}{e^{2gs:f^2}}.$$

Je größer s wird, desto kleiner wird c, welches überhaupt so klein werden kann, als man will, obgleich es nie zu o werden kann, d. h. also die Bewegung wird immer langsamer, aber hört doch nie ganz auf.

Um auch endlich die Gleichung zwischen Raum und Zeit zu gewinnen, verbinde man die Gleichungen:

$$c = \frac{a f^2}{2gat + f^2}$$

$$c = \frac{a}{e^{2gs : f^2}},$$

so erhält man:

$$\frac{f^2}{2gat + f^2} = \frac{1}{e^{2gs : f^2}} \text{ also}$$

$$e^{2gs : f^2} = \frac{2gat + f^2}{f^2} = 1 + \frac{2gat}{f^2}$$

$$s = \frac{f^2}{2g} \log\text{nat.} \left(1 + \frac{2gat}{f^2}\right).$$

Bewegung eines Körpers in einem widerstehenden Mittel, welcher durch eine constante Kraft getrieben wird.

§. 251.

Wenn auf einen Körper außer der negativen Kraft des Widerstandes auch noch eine andere constante Kraft z. B. die Schwerkraft an der Oberfläche der Erde, einwirkt, so ist die gesammte Kraft v, wenn sich wieder die Kraft des Widerstandes wie das Quadrat der Geschwindigkeit verhält, und die Schwerkraft als die Bewegung befördernd angesehen wird, also positiv genommen werden muß:

$$= 2g - \frac{2gc^2}{f^2}$$

und dieses ist die Kraft, mit welcher der Körper zur Erde getrieben wird.

Für den steigenden Körper ist auch die Schwere gegen die Bewegung wirkend, also gleichfalls negativ, daher die gesammte Kraft in diesem Falle:

$$v = -\left(2g + \frac{2gc^2}{f^2}\right).$$

Nehmen wir erst die Formel für den fallenden Körper vor, und beabsichtigen, die Gleichung zwischen der Zeit und der Geschwindigkeit abzuleiten, so ist, da $t = \int \frac{dc}{v}$ ist:

$$t = \frac{1}{2g} \int \frac{dc}{1 - \frac{1}{f^2} c^2}.$$

Um zur Integration zu gelangen, zerlege man den Bruch $\frac{1}{1 - \frac{c^2}{f}}$ in die beiden Partialbrüche $\frac{A}{1 + \frac{c}{f}}$ und $\frac{B}{1 - \frac{c}{f}}$, wo man leicht $A = B = \frac{1}{2}$ findet. (§. 60.) Daher ist:

$$t = \frac{1}{4g} \int \frac{dc}{1 + \frac{c}{f}} + \frac{1}{4g} \int \frac{dc}{1 - \frac{c}{f}}$$

$$= \frac{f}{4g} (\log (1 + \frac{c}{f}) - \log (1 - \frac{c}{f}))$$

$$= \frac{f}{4g} \log \frac{f + c}{f - c} + C.$$

Soll der Körper aus der Ruhe anfangen zu fallen, so ist für $t = 0$ auch $c = 0$, daher auch $C = 0$, man hat daher allgemein:

$$t = \frac{f}{4g} \log \frac{f + c}{f - c},$$

welches die Gleichung zwischen Zeit und Geschwindigkeit ist.

Durch Umkehrung dieser Gleichung findet man c durch t ausgedrückt. Es ist:

$$\log \frac{f + c}{f - c} = \frac{4gt}{f}$$

$$e^{4gt : f} = \frac{f + c}{f - c}$$

$$c = \frac{f(e^{4gt : f} - 1)}{e^{4gt : f} + 1}.$$

Aus dieser Beziehung ist klar, wenn t sehr groß wird, d. h. wenn die Bewegung sehr lange dauert, daß alsdann, da die Einheit gegen $e^{4gt : f}$ immer unbeträchtlicher wird, und sich daher der Bruch, welcher c darstellt, immer mehr der constanten Größe f nähert, die Geschwindigkeit immer mehr constant, also die Bewegung gleichförmig zu werden strebt. Dasselbe findet Statt, wenn f sehr gering ist, d. h. wenn das Medium sehr stark widerstehet, denn alsdann wird auch die Einheit gegen $e^{4gt:f}$ unbeträchtlich.

Um die Gleichung zwischen Raum und Geschwindigkeit zu erhalten, so substituire man in die Formel $s = \int \frac{c\,dc}{v}$ für v den oben abgeleiteten Werth, und man erhält:

$$s = \frac{1}{2g} \int \frac{c\,dc}{1 - \frac{c^2}{f^2}} = -\frac{f^2}{4g} \log\left(1 - \frac{c^2}{f^2}\right) + C.$$

Da der Körper für $s = 0$ aus dem Ruhestand hervorgehen soll, so ist hier auch $c = 0$, daher auch $C = 0$. Nun ist aber $\frac{c}{f} = \frac{e^{4gt:f} - 1}{e^{4gt:f} + 1}$ stets ein echter Bruch, also auch $1 - \frac{c^2}{f^2}$ und daher $\log\left(1 - \frac{c^2}{f^2}\right)$ negativ, wodurch das negative Zeichen vor s wieder aufgehoben wird, so, daß s oder der Raum positiv ist, wie es der Natur der Sache nach auch nicht anders seyn kann.

Kehrt man diese Gleichung um, so erhält man c durch s ausgedrückt; es ist:

$$\log\left(1 - \frac{c^2}{f^2}\right) = -\frac{4gs}{f^2},$$

und

$$c = f.\sqrt{(1 - e^{-4gs:f^2})}$$

Um endlich die Gleichung zwischen Raum und Zeit darzustellen, substituire man in die Formel:

$$s = -\frac{f^2}{4g} \log\left(1 - \frac{c^2}{f^2}\right),$$

für c den gefundenen Werth: $\frac{f\,(e^{4gt:f} - 1)}{e^{4gt:f} + 1}$, so erhält man:

$$s = -\frac{f^2}{4g} \log\left(1 - \frac{(e^{4gt:f} - 1)^2}{(e^{4gt:f} + 1)^2}\right).$$

Man setze der Einfachheit wegen $e^{4gt:f} = a$, so ist: $(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1$, $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$, daher

$$1 - \frac{(a-1)^2}{(a+1)^2} = \frac{a^2 + 2a + 1 - (a^2 - 2a + 1)}{a^2 + 2a + 1} = \frac{4a}{(a+1)^2},$$

folglich erhält man:

$$s = -\frac{f^2}{4g} \log \left(\frac{4a}{(a+1)^2}\right)$$

$$= -\frac{f^2}{4g} \log \left(\frac{4\, e^{4gt:f}}{(e^{4gt:f} + 1)^2}\right)$$

$$= -\frac{f^2}{4g} \log \left(\frac{2\, e^{2gt:f}}{e^{4gt:f} + 1}\right)^2$$

$$= \frac{f^2}{2g} \log \frac{e^{4gt:f} + 1}{2\, e^{2gt:f}}$$

$$= \frac{f^2}{2g} \log \left(\frac{e^{2gt:f} + e^{-2gt:f}}{2}\right).$$

Dieses ist also die gefoderte Gleichung zwischen Raum und Zeit bei der fallenden Bewegung in einem widerstehenden Medio.

§. 252.

Für die steigende Bewegung des Körpers fanden wir die Kraft:

$$v = -\left(2g + \frac{2gc^2}{f^2}\right).$$

Um zuerst die Gleichung zwischen Zeit und Geschwindigkeit zu erhalten, haben wir die Formel: $t = \int \frac{dc}{v}$, also ist hier

$$t = -\frac{1}{2g} \int \frac{dc}{1 + \frac{c^2}{f^2}} = -\frac{f}{2g} \int \frac{\frac{1}{f}\, dc}{1 + \frac{c^2}{f^2}}$$

$$= -\frac{f}{2g} .\ \text{Arc. Tang}\ \frac{c}{f} + C.$$

Der Körper habe anfänglich die Geschwindigkeit $= b$, so ist für $t = o$, $c = b$, und daher:

$$o = -\frac{f}{2g} \text{ Arc. Tang } \frac{b}{f} + C,$$

folglich:

$$t = \frac{f}{2g} (\text{Arc. Tang } \frac{b}{f} - \text{Arc. Tang } \frac{c}{f}).$$

Will man die Tangente des Bogens Arc. Tang $\frac{b}{f}$ — Arc. Tang $\frac{c}{f}$ finden, so ist solche:

$$= \frac{\frac{b}{f} - \frac{c}{f}}{1 + \frac{bc}{f^2}} = \frac{bf - cf}{f^2 + bc},$$

daher ist:

$$t = \frac{f}{2g} \text{ Arc. Tang } \frac{bf - cf}{f^2 + bc}.$$

Kehrt man diese Gleichung um, so erhält man:

$$\frac{bf - cf}{f^2 + bc} = \text{Tang. } \frac{2gt}{f}$$

$$c = \frac{bf - f^2 \text{ Tang } \frac{2gt}{f}}{f + b \text{ Tang } \frac{2gt}{f}}.$$

Die Gleichung zwischen Raum und Geschwindigkeit findet sich nach der Formel:

$$= \int \frac{c\,dc}{v},$$

also ist:

$$s = -\frac{1}{2g} \int \frac{c\,dc}{1 + \frac{c^2}{f^2}} = -\frac{f^2}{4g} \log (1 + \frac{c^2}{f^2}) + C.$$

Für $s = o$ fängt die Bewegung an, und zwar mit der Geschwindigkeit b, daher erhält man:

$$o = -\frac{f^2}{4g} \log (1 + \frac{b^2}{f^2}) + C,$$

also:

$$s = \frac{f^2}{4g}\left(\log\left(1 + \frac{b^2}{f^2}\right) - \log\left(1 + \frac{c^2}{f^2}\right)\right)$$
$$= \frac{f^2}{4g} \log \frac{f^2 + b^2}{f^2 + c^2},$$

welches die gesuchte Gleichung zwischen Raum und Geschwindigkeit ist. Kehrt man sie um, so erhält man:

$$e^{4gs : f^2} = \frac{f^2 + b^2}{f^2 + c^2}$$
$$c = \sqrt{((f^2 + b^2)\, e^{-4gs : f^2} - f^2)}.$$

Durch Combination dieser beiden Formeln erhält man endlich die Gleichung zwischen Raum und Zeit.

II. Von der krummlinigen Bewegung.

§. 253.

Es bewege sich eine grade Linie PM (Fig. 68.) parallel mit sich selbst fort. Sie wird auf einer andern graden Linie AQ Stücke AP, Ap abschneiden, und diese Räume, mit den Zeiten verglichen, werden auf die Geschwindigkeit jener Bewegung schliessen lassen. Während sich aber diese Linie progressiv fortbewegt, mag ein Punct in derselben gleichfalls eine progressive Bewegung haben; so wird dieser im Allgemeinen eine Curve Mm beschreiben, deren Natur von dem Gesetze der Bewegungen in AQ und PM abhängt.

Sey allgemein AP = x, PM = y, und sey das Gesetz, wonach x fließt, oder wonach die grade Linie PM fortrückt, eine Function der Zeit:

$$x = \varphi(t)$$

sey eben so das von der Zeit t abhängige Gesetz, wonach y fließt:

$$y = \chi(t),$$

so wird sich aus beiden Gleichungen t eliminiren lassen, und man erhält:

$$y = \psi(x)$$

als Gleichung für die Curve Mm.

§. 254.

Ist $x = \varphi(t)$ das Abscissengesetz, so ist $\frac{dx}{\Delta t}$ die Geschwindigkeit, womit x wächst, oder womit die Linie PM fortrückt, ferner ist $\frac{d^2x}{\Delta t^2}$ das Bestreben, diese Geschwindigkeit der Abscisse abzuändern, oder die Kraft, welche hier thätig ist. Ist ferner $y = \chi(t)$ das Ordinatengesetz, so ist $\frac{dy}{\Delta t}$ die Geschwindigkeit, mit welcher der Punct in PM fortrückt, und $\frac{d^2y}{\Delta t^2}$ die Kraft, welche in dieser Richtung wirkt. Wir wollen diese Begriffe durch Abscissengeschwindigkeit, Abscissenkraft, Ordinatengeschwindigkeit, Ordinatenkraft andeuten, welche den Benennungen Ordinatenbestreben, Curvenbestreben u. s. w. in der analytischen Geometrie analog sind.

Die von dem Puncte beschriebene Bahn ist die Curve, deren Länge s von x und y, also von t abhängt, daß man also setzen darf:

$$s = f(t).$$

Die Geschwindigkeit, womit der Punct in der Curve fortrücken will, oder das Bestreben, mit welchem sich die Länge s zu vergrößern die Tendenz hat, ist daher $= \frac{ds}{\Delta t}$. Wenn nun der Coordinatenwinkel MPp, d. h. der Winkel, unter welchem die parallel mit sich selbst fortrückende grade Linie PM gegen AQ geneigt ist, φ genannt wird, so hat man nach §. 165:

$$ds = \sqrt{(dy^2 + 2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\, dy\, dx + dx^2)},$$

daher hat man hier die Geschwindigkeit, womit der beschreibende Punct in der Curve fortrückt, welche wir die Curvengeschwindigkeit nennen wollen;

$$= \frac{\sqrt{(dy^2 + 2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\; dy\, dx + dx^2)}}{\Delta t}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dy^2}{\Delta t^2} + \frac{2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\; dy\, dx}{\Delta t^2} + \frac{dx^2}{\Delta t^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dy^2}{\Delta t^2} + 2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,\frac{dy}{\Delta t}\cdot\frac{dx}{\Delta t} + \frac{dy^2}{\Delta t^2}\right)},$$

wo $\frac{dy}{\Delta t}$ die Ordinatengeschwindigkeit, $\frac{dx}{\Delta t}$ die Abscissengeschwindigkeit ist.

Ist der Coordinatenwinkel ein rechter, also $\operatorname{Cos}\varphi = 0$, so ist die Curvengeschwindigkeit:

$$= \sqrt{\left(\frac{dy^2}{\Delta t^2} + \frac{dx^2}{\Delta t^2}\right)}.$$

Die Abscissengeschwindigkeit des Puncts in M hat die Richtung Ms, die Ordinatengeschwindigkeit hingegen die Richtung Mw; stellt nun Mn der Richtung und Größe nach die Abscissengeschwindigkeit, Mq der Richtung und Größe nach die Ordinatengeschwindigkeit vor, so ist die Curvengeschwindigkeit:

$$= \sqrt{(Mq^2 + 2 \operatorname{Cos}\varphi\, Mq.\, Mn + Mn^2)},$$

welcher Ausdruck bekanntlich für die Linie Mr gehört, so, daß also Mr der Lage und Größe nach die Curvengeschwindigkeit vorstellt, wenn Mn und Mq die Abscissen- und Ordinatengeschwindigkeit sind. Daher der Satz: **hat ein Punct M eine gewisse Geschwindigkeit nach der Richtung Ms, der Größe nach durch Mn repräsentirt, eine andere nach der Richtung Mw, welche durch die Linie Mq dargestellt seyn mag; so erhält der Punct dadurch eine mittlere Geschwindigkeit, welche der Lage und Größe nach durch die Diagonale Mr des aus Mn und Mq und dem Winkel φ entstehenden Parallelograms ausgedrückt wird.**

Nun ist aber die Tangente des Winkels rMn

$$= \frac{rn \operatorname{Sin}\varphi}{Mn + rn \operatorname{Cos}\varphi}$$

$$= \frac{\frac{dy}{\Delta t}\operatorname{Sin}\varphi}{\frac{dx}{\Delta t} + \frac{dy}{\Delta t}\operatorname{Cos}\varphi} = \frac{dy \operatorname{Sin}\varphi}{dx + dy \operatorname{Cos}\varphi}$$

$$= \frac{\frac{dy}{dx}\operatorname{Sin}\varphi}{1 + \frac{dy}{dx}\operatorname{Cos}\varphi},$$

und da dieses die Tangente des Winkels ist, welchen die Berührende in M mit der Abscisse macht, (§. 129.) so folgt, daß die Richtung der Curvengeschwindigkeit keine andere, als die der Berührenden ist.

§. 255.

Im Allgemeinen wird es ein Bestreben geben, welches den Zustand der Curvengeschwindigkeit abändert, d. h. eine **Curvenkraft.** Diese kann nicht in der Richtung der Geschwindigkeit thätig seyn, d. h. in der Richtung der Berührenden, indem sonst den Körper oder Punct nichts hindern würde, in dieser Richtung selbst fortzugehen, wozu er schon in M das Bestreben hatte. Das Bestreben, die Curvengeschwindigkeit abzuändern ist also nicht:

$$\frac{d\left(\frac{ds}{\Delta t}\right)}{\Delta t} = \frac{d^2 s}{\Delta t^2}$$

$$= \frac{2 d^2 y\, dy + 2 \operatorname{Cos}\varphi\,(dy\, d^2 x + dx\, d^2 y) + 2\, dx\, d^2 x}{\Delta t^2\, 2\sqrt{(dy^2 + 2 \operatorname{Cos}\varphi\, dy\, dx + dx^2)}}$$

$$= \frac{d^2 y \frac{dy}{dx} + \operatorname{Cos}\varphi\left(d^2 x \frac{dy}{dx} + d^2 y\right) + d^2 x}{\Delta t^2 \sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 2 \operatorname{Cos}\varphi \frac{dy}{dx} + 1\right)}}$$

welches nur dann Statt finden kann, wenn der beschreibende Punct seine Richtung nie ändert, oder, wenn das Bestreben der Curve, ihre Richtung zu ändern $= 0$ ist. Diese Richtung ist aber der Winkel, den die Berührende mit der Abscisse macht, und dessen Tangente $= \dfrac{\frac{dy}{dx} \operatorname{Sin}\varphi}{1 + \frac{dy}{dx} \operatorname{Cos}\varphi} = \dfrac{p \operatorname{Sin}\varphi}{1 + p \operatorname{Cos}\varphi}$

ist, wenn man $\frac{dy}{dx} = p$ nennt. Die Richtung ist daher $= \operatorname{Arc. Tang} \frac{p \operatorname{Sin}\varphi}{1 + p \operatorname{Cos}\varphi}$, und das Bestreben, die Richtung abzuändern, ist:

$$= \frac{(1 + p \operatorname{Cos}\varphi) \operatorname{Sin}\varphi\, dp - p \operatorname{Sin}\varphi . \operatorname{Cos}\varphi\, dp}{(1 + p \operatorname{Cos}\varphi)^2 \left(1 + \left(\frac{p \operatorname{Sin}\varphi}{1 + p \operatorname{Cos}\varphi}\right)^2\right)}$$

$$= \frac{\operatorname{Sin}\varphi . dp}{1 + 2p . \operatorname{Cos}\varphi + p^2}.$$

Dieses Bestreben muß also $= 0$ seyn, dafern der obige Ausdruck in der That die Curvenkraft ausdrücken soll, d. h. es muß $dp = 0$ seyn. Nun ist aber $dp = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^2}$ also hat man: $dx\, d^2y - dy\, d^2x = 0$ oder:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{d^2x},$$

welches die Bedingungsgleichung ist, unter welcher die oben gefundene Formel wirklich die Curvenkraft ausdrückt. Substituirt man also für $\frac{dy}{dx}$ den Werth $\frac{d^2y}{d^2x}$, so erhält man die Curvenkraft:

$$= \frac{\frac{d^2y^2}{d^2x} + \mathrm{Cos}\,\varphi\,(d^2y + d^2y) + d^2x}{\Delta t^2 \sqrt{(\frac{d^2y^2}{d^2x^2} + 2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,\frac{d^2y}{d^2x} + 1)}}$$

$$= \frac{d^2y^2 + 2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\, d^2y\, d^2x + d^2x^2}{\Delta t^2 \sqrt{(d^2y^2 + 2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\, d^2y\, d^2x + d^2x^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(d^2y^2 + 2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\, d^2y\, d^2x + d^2x^2)}}{\Delta t^2}$$

$$= \sqrt{((\frac{d^2y}{\Delta t^2})^2 + 2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,\frac{d^2y}{\Delta t^2}\cdot\frac{d^2x}{\Delta t^2} + (\frac{d^2x}{\Delta t^2})^2)}.$$

Nun ist aber $\frac{dy}{\Delta t^2}$ die Ordinatenkraft, $\frac{d^2x}{\Delta t^2}$ die Abscissenkraft, und folglich setzen sich zwei nach verschiedenen Richtungen an einem Puncte M wirkende Kräfte auf eben die Art zusammen, wie die Geschwindigkeiten; construirt man daher ein Parallelogram, dessen Seiten sowohl der Größe oder Stärke, als auch der Richtung nach die beiden Kräfte repräsentiren, so stellt die Diagonale desselben die mittlere Kraft sowohl der Richtung als Stärke nach, vor.

Ist der Coordinatenwinkel ein rechter, so ist die Curvenkraft $= \sqrt{((\frac{d^2y}{\Delta t^2})^2 + (\frac{d^2x}{\Delta t^2})^2)}$.

Aus dem Parallelogram folgt auf dieselbe Weise, wie vorhin, daß die Tangente des Winkels, unter welchem die Richtung der Curvenkraft gegen die Abscisse geneigt ist,

$$= \frac{\frac{d^2y}{d^2x} \operatorname{Sin} \varphi}{1 + \frac{d^2y}{d^2x} \operatorname{Cos} \varphi}$$

sey. Ist der Coordinatenwinkel ein rechter, also $\operatorname{Sin} \varphi = 1$, $\operatorname{Cos} \varphi = 0$, so ist die Tangente des Winkels $= \frac{d^2y}{d^2x}$.

Wenn daher zwei Geschwindigkeiten oder Kräfte nach verschiedenen Richtungen gegeben sind, so kann man sie durch obige Formeln in eine mittlere Geschwindigkeit oder Kraft verwandeln; umgekehrt, wenn irgend eine Geschwindigkeit oder Kraft allein in einer gewissen Richtung vorhanden ist, so kann man sie in zwei andere nach gegebenen Richtungen zerlegen.

§. 256.

Wir haben bis jetzt die Curven unter der Voraussetzung paralleler Coordinaten betrachtet, man kann sie aber auch, wie wir im Vorhergehenden gesehen haben, als Spiralen ansehen, und dann wird sich die Curvenbewegung aus der progressiven Bewegung eines Puncts, und aus der drehenden Bewegung einer Linie zusammensetzen. Es wird dabei angenommen, daß sich die grade Linie AP (Fig. 46.) um den Punct A drehe, so, daß der beschriebene Winkel w eine von der Zeit t abhängende Fluente ist; daß ferner während der drehenden Bewegung dieser graden Linie ein Punct in derselben fortrückt, und daß der beschriebene Weg z desselben wieder eine Function von t ist, so, daß man hat:

$$w = \varphi(t) \text{ und } z = \varphi(t).$$

Eliminirt man t, so erhält man z als Function von w, d. h. die Gleichung oder das Gesetz für die von dem bewegten Puncte beschriebene Spirale.

Um zu den Ausdrücken für die Geschwindigkeit, mit welcher der Punct im Radiusvector fortrückt, für die Kraft, welche hier thätig ist, so wie auch für die Geschwindigkeit, mit welcher der Punct in der drehenden Bewegung sich ändern will, und endlich für die hier waltende Kraft zu gelangen, können wir uns der gewohnten Betrachtungsweise bedienen, oder auch die Abscissengeschwindigkeit und Abscissenkraft, so wie auch die Ordinatengeschwindigkeit und Ordinatenkraft, wenn die Curve Orthogonale wäre, in die hier zu betrachtenden Geschwindigkeiten und Kräfte zerlegen, indem man darauf noch statt x den Werth — $z \operatorname{Cos} w$, für y aber $z \operatorname{Sin} w$ substituirt. (§. 195.)

Dadurch findet man die Radiusvector-Geschwindigkeit $= \frac{dz}{\Delta t}$, die drehende Geschwindigkeit $= \frac{z\,d\varphi}{\Delta t}$, ferner die Radiusvector-Kraft $= \frac{d^2 z - z\,d\varphi^2}{\Delta t^2}$ und die drehende Kraft: $= \frac{2\,dz\,d\varphi + z\,d^2\varphi}{\Delta t^2}$.

§. 257.

Man kann sich endlich auch vorstellen, die Curvenbewegung werde durch zwei wirkende Kräfte hervorgebracht, wovon die eine stets in der Tangente der Curve thätig ist, (**Tangentialkraft**), die andere aber diese Richtung abzulenken strebt, und senkrecht auf der Richtung der Tangente als wirksam gedacht wird, (**Normalkraft**).

Wenn man sowohl die Abscissen- als die Ordinatenkraft in zwei andere Kräfte zerlegt, wovon die eine in der Tangente, die andere in der Normale thätig ist, so erhält man für die Tangentialkraft den Ausdruck:

$$\frac{d^2x\,dx + d^2y\,dy}{\Delta t^2\,ds} = \frac{d^2x\,dx + d^2y\,dy}{\Delta t^2\sqrt{(dy^2 + dx^2)}}.$$

Nun ist aber $\frac{d^2x\,dx + d^2y\,dy}{\sqrt{(dy^2 + dx^2)}}$ das Differential von $\sqrt{(dy^2 + dx^2)}$, oder von ds, folglich hat man für die Tangentialkraft die Formel:

$$\frac{d^2 s}{\Delta t^2} = \frac{d\left(\frac{ds}{\Delta t}\right)}{\Delta t}.$$

Nun ist aber $\frac{ds}{\Delta t}$ die Curvengeschwindigkeit, welche wir c nennen wollen, folglich ist die Tangentialkraft $= \frac{dc}{\Delta t}$.

Für die Normalkraft erhält man bei der Zerlegung zwei sich widerstreitende Kräfte, wovon die eine nach der concaven Seite der Curve, die andere nach der convexen Seite derselben wirkt. Siehet man die einwärts wirkende als die ursprüngliche, also als positiv an, so hat man für die Normalkraft den Ausdruck:

$$= \frac{d^2y\,dx - d^2x\,dy}{ds\,\triangle t^2}.$$

Nun ist aber:

$$d\,\frac{dy}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2},$$

also

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) dx^2 = dx\,d^2y - dy\,d^2x,$$

und daher die Normalkraft:

$$= \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right) dx^2}{ds\,\triangle t^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} \cdot \frac{dx^3}{ds\,\triangle t^2}.$$

Man hat aber für den Krümmungshalbmesser den Ausdruck:

$$r = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}} = \frac{ds^3}{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} \cdot dx^3}$$

also:

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} \cdot dx^3 = \frac{ds^3}{r},$$

folglich die Normalkraft:

$$= \frac{ds^2}{r\,\triangle t^2},$$

oder für $\frac{ds^2}{\triangle t^2} = c^2$ gesetzt, hat man die Normalkraft:

$$= \frac{c^2}{r}.$$

Auf die bisher abgeleiteten Formeln für die Geschwindigkeiten und Kräfte kommen alle Untersuchungen der höheren Mechanik im Wesentlichen zurück.

§. 258.

Von den vielen Anwendungen, welche wir jetzt von den Grundformen zu machen in den Stand gesetzt sind, zeichnen sich vorzugsweise zwei Hauptklassen aus, welche aber auch einer besondern Aufmerksamkeit werth sind.

1. Man kennt die Curve und die Geschwindigkeit, womit sie beschrieben wird, und sucht daraus die Richtung und Stärke der Kraft.
2. Man kennt die Kraft, sowohl der Stärke als Richtung nach, und sucht daraus die Curve, welche der Punct oder Körper, welcher durch sie getrieben wird, zu beschreiben gezwungen ist, und die Geschwindigkeit, womit es geschiehet.

I. Curve und Curvengeschwindigkeit ist bekannt, man sucht daraus die Stärke und Richtung der Kraft.

§. 259.

Um uns an die Erscheinungen in der Natur selbst zu halten, wollen wir annehmen, die Geschwindigkeit des bewegten Puncts in der Curve CM (Fig. 69.) sey so, daß die Sectoren CAM mit der Zeit gleichförmig wachsen, so, daß man also, wenn diese Fläche z ist, die Gleichung $z = at$ habe. Der Anfangspunct der Abscissen sey in A, so hat man für das Differential der Fläche CPM den Ausdruck $y\,dx$, für das Dreieck APM aber $\frac{yx}{2}$, also für das Differential desselben: $\frac{y\,dx + x\,dy}{2}$, und folglich das Differential des Sectors oder dz

$$= y\,dx - \frac{y\,dx + x\,dy}{2}$$

$$= \frac{y\,dx - x\,dy}{2}.$$

Da nun $z = at$, also $dz = a \triangle t$ ist, so hat man:

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{2} = a \triangle t.$$

Differentiirt man diesen Ausdruck noch einmal, so ist:

$$\frac{y\,d^2x + dx\,dy - x\,d^2y - dy\,dx}{2} = 0,$$

d. h.

$$y\,d^2x - x\,d^2y = 0 \text{ und:}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{d^2y}{d^2x}.$$

Nun bedeutet aber $\frac{d^2y}{d^2x}$ die Tangente des Winkels, welchen die Richtung der Kraft mit der Abscisse macht; man hat also die Tangente dieses Winkels $= \frac{y}{x}, = \frac{PM}{AP}$, und folglich ist die Richtung der Kraft jederzeit die Linie AM, d. h. wo sich auch der Körper befinden möge, es wirkt immer eine Kraft auf ihr, welche in der Richtung MA thätig ist, so, daß man sich also diese Kraft als von A ausgehend denken muß.

§. 260.

Wir haben die Curve eben als Orthogonale betrachtet, denkt man sie sich aber als Spirale, so hat man, da das Differential der Fläche CAM $= \frac{z^2\,d\varphi}{2}$ ist,

$$\frac{z^2\,d\varphi}{2} = a \triangle t.$$

Differentiirt man noch einmal, so erhält man:

$$\frac{2z\,dz\,d\varphi + z^2\,d^2\varphi}{2} = 0 \text{ oder auch}$$

$$2z\,dz\,d\varphi + z^2\,d^2\varphi = 0.$$

Dieses ist aber der Ausdruck für die drehende Kraft, ist diese $= 0$, so wirkt allein die Radiusvector-Kraft, und die Richtung der den Körper oder Punct treibenden Kraft ist also AM selbst, welches Resultat mit dem vorigen übereinstimmt.

Nimmt man daher innerhalb einer Curve einen beliebigen Punct A an, und macht die Voraussetzung, daß sich ein Körper in dieser Curve mit einer solchen Geschwindigkeit bewege, daß die Sectoren, welche die Linie AM beschreibt, den Zeiten proportional sind; so muß die den Körper treibende Kraft in A selbst ihren Sitz haben.

§. 261.

Um die Stärke der Kraft auszumitteln, ist erfoderlich, daß man die Curve kenne. Es werde hierzu eine Parabel gewählt, so ist ihre Gleichung: $y = \sqrt{bx}$, und aus dem Brennpuncte betrachtet: $y = \sqrt{(bx + \frac{1}{4}b^2)}$.

Da hier die wirkende Kraft eine Centralkraft seyn soll, so ist nach dem vorhergehenden §. $y\,dx - x\,dy = c\,\Delta t$, und $\frac{d^2 y}{d^2 x} = \frac{y}{x}$. Man hat also:

$$\frac{d^2x^2 + d^2y^2}{d^2y^2} = \frac{x + y^2}{y^2},$$

also:

$$\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2)} = \frac{d^2y}{y}\sqrt{(x^2 + y^2)}.$$

Da nun vermöge der Gleichung:

$$y^2 = bx + \tfrac{1}{4}b^2$$

$$2y\,dy = b\,dx \text{ und } dx = \frac{2y}{b}\,dy$$

gefunden wird, so hat man, wenn man dieses in die Gleichung:

$$y\,dx - x\,dy = c\,\Delta t$$

substituirt:

$$\frac{2y^2\,dy}{b} - x\,dy = c\,\Delta t.$$

und für y^2 den Werth $bx + \frac{1}{4}b^2$ gesetzt:

$$\left(\frac{2bx + \frac{1}{2}b^2}{b} - x\right)dy = (x + \tfrac{1}{2}b)\,dy = c\,\Delta t$$

und daher:

$$dy = \frac{c \triangle t}{x + \frac{1}{2} b}$$

folglich:

$$d^2 y = -\frac{c \triangle t \, dx}{(x + \frac{1}{2} b)^2}.$$

Substituirt man dieses in den Ausdruck für die Kraft, so ist dieselbe:

$$v = -\frac{c \, dx \sqrt{(y^2 + x^2)}}{y(x + \frac{1}{2} b)^2 \triangle t}$$

und da $dx = \frac{2y \, dy}{b}$, so hat man:

$$v = -\frac{2c \, dy \sqrt{(y^2 + x^2)}}{b(x + \frac{1}{2} b)^2 \triangle t}.$$

Endlich erhält man, nachdem für dy der Werth $\frac{c \triangle t}{x + \frac{1}{2} b}$ substituirt ist, für die Kraft den Ausdruck:

$$v = -\frac{2c^2 \sqrt{(y^2 + x^2)}}{b(x + \frac{1}{2} b)^3} = -\frac{2c^2 \sqrt{(bx + \frac{1}{4} b^2 + x^2)}}{b(x + \frac{1}{2} b)^3}$$

$$= -\frac{2c^2}{b(x + \frac{1}{2} b)^2}.$$

Aus diesem Ausdrucke erkennt man: 1) die Kraft im Brennpuncte ist negativ, ziehet also an, 2) da $x + \frac{1}{2} b$ der Radiusvector der Parabel, also die Entfernung des Körpers vom Brennpuncte oder dem Sitze der Kraft ist, so verhält sich die Stärke der Kraft umgekehrt, wie das Quadrat der Entfernungen vom Centrum der Kraft.

§. 262.

Die Curve mag jetzt als Spirale angesehen werden. Zu diesem Zwecke sey die anzunehmende Curve eine Ellipse, und es bedeute a die halbe große, c die halbe kleine Axe, f die Excentricität CF (Fig. 70.) derselben, so ist die Spiralgleichung für diese Linie, wenn der eine Brennpunct F das Coordinatencentrum ist:

$$z = \frac{c^2}{a + f \operatorname{Cos} w}.$$

Sollen nun in gleichen Zeiten gleiche Flächensectoren beschrieben werden, so ist nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{z^2\,dw}{2} = b\,\Delta t,$$

die drehende Kraft ist $= 0$ und die Radiusvectorkraft, als die einzige, welche hier wirkt, allgemein:

$$= \frac{d^2 z - z\,d\varphi^2}{\Delta t^2}.$$

In diesen allgemeinen Ausdruck müssen die darin angezeigten Werthe substituirt werden, um die Größe oder Stärke der Kraft zu erhalten.

Differentiirt man die Gleichung der Ellipse, so hat man:

$$dz = \frac{c^2\,f\,\mathrm{Sin}\,w\,dw}{(a+f\,\mathrm{Cos}\,w)^2} = \frac{f\,z^2\,\mathrm{Sin}\,w\,dw}{c^2}$$

hierin den Werth $\frac{2b\,\Delta t}{z^2}$ für dw substituirt, so ist:

$$dz = \frac{2bf\,\Delta t\,\mathrm{Sin}\,w}{c^2}$$

und

$$d^2 z = \frac{2bf\,\Delta t\,\mathrm{Cos}\,w\,dw}{c^2}$$

$$= \frac{4b^2 f\,\Delta t^2\,\mathrm{Cos}\,w}{c^2\,z^2}.$$

Wenn man nun für $d^2 z$ diesen Werth, für dw^2 aber $\frac{4b^2\,\Delta t^2}{z^4}$ in den allgemeinen Ausdruck für die Kraft substituirt, so erhält man:

$$\frac{\frac{4b^2 f\,\Delta t^2\,\mathrm{Cos}\,w}{c^2\,z^2} - \frac{z\,4b^2\,\Delta t^2}{z^4}}{\Delta t^2}$$

$$= \frac{4b^2 f\,\mathrm{Cos}\,w}{c^2\,z^2} - \frac{4b^2}{z^3} = 4b^2\left(\frac{z\,f\,\mathrm{Cos}\,w - c^2}{c^2\,z^3}\right)$$

Setzt man jetzt für z seinen Werth, so ist dieser Ausdruck:

$$= 4b^2\left(\frac{f\,\mathrm{Cos}\,w\,\frac{c^2}{a+f\,\mathrm{Cos}\,w} - c^2}{c^2\,z^3}\right)$$

$$= 4b^2 \left(\frac{f \operatorname{Cos} w - (a + f \operatorname{Cos} w)}{z^3 (a + f \operatorname{Cos} w)}\right) = - \frac{4ab^2}{z^3 (a + f \operatorname{Cos} w)}$$

$$= - \frac{4ab^2}{c^2 z^2}.$$

Da dieser Ausdruck negativ ist, und z oder der Radiusvector die jedesmalige Entfernung des Puncts vom Centrum bedeutet; so folgt, daß die den Körper treibende Kraft anziehe, und sich ihre Stärke umgekehrt verhalte, wie das Quadrat der Entfernung vom Centrum der Kraft. Dasselbe läßt sich auch von jedem andern Kegelschnitt beweisen.

§. 263.

Die Größe b ist die constante Geschwindigkeit, womit die elliptischen Sectoren wachsen, denn man hatte

$$\frac{z^2\,dw}{2} = b \triangle t \text{ oder } b = \frac{ds}{\triangle t},$$

wenn s den Sector bedeutet. Diese Größe b hängt von der absoluten Kraft, welche im Centrum wirkt, ab, und diese absolute Kraft wird man dadurch erkennen, wenn man ihre Stärke in einer gewissen constant angenommenen Entfernung z. B. R untersucht. Sey diese absolute Kraft = K, so ist

$$K = \frac{4ab^2}{c^2 R^2} \text{ also}$$

$$b = \frac{cR}{2} \sqrt{\frac{K}{a}}.$$

Um die Zeit darzustellen hat man:

$$b \triangle t = \frac{z^2\,d\varphi}{2} \text{ also}$$

$$t = \frac{1}{b} \int \frac{z^2\,dw}{2}.$$

Nun ist aber $\int \frac{z^2\,dw}{2}$ für die ganze Ellipse, oder für $w = 2\pi$,

$$= ca\pi \text{ (§. 156.)},$$

daher drückt:

$$t = \frac{ca\pi}{b} = \frac{2a\pi}{R\sqrt{\frac{K}{a}}}$$

die ganze Umlaufszeit des Körpers in der Ellipse aus.

Für einen andern Körper, welcher sich gleichfalls in einer Ellipse, deren halbe große Axe $= A$, halbe kleine Axe $= C$ ist, bewegend, von derselben Kraft K getrieben wird, sey die Umlaufszeit $= T$; so ist:

$$T = \frac{2A\pi}{R\sqrt{\frac{K}{A}}}$$

und daher hat man:

$$\frac{t}{T} = \frac{2a\pi}{R\sqrt{\frac{K}{a}}} : \frac{2A\pi}{R\sqrt{\frac{K}{A}}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\frac{K}{a}}} : \frac{A}{\sqrt{\frac{K}{A}}} = \frac{a\sqrt{a}}{A\sqrt{A}},$$

also:

$$\frac{t^2}{T^2} = \frac{a^3}{A^3},$$

daher verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten verschiedener Körper, wie die Cubi der großen Axen ihren Bahnen.

2) Die Stärke und Richtung der Kraft ist bekannt, man sucht daraus die Curve und die Geschwindigkeit, womit sie beschrieben wird.

§. 264.

Was die Richtung der Kraft anbetrifft; so machen wir hier zwei Voraussetzungen; 1) sie wirkt stets nach einer und derselben Richtung, macht also mit einer gewissen graden Linie, welche als Abscissenlinie angenommen werden kann, einen gegebenen Winkel, so, daß daher die Kraft als Ordinatenkraft $= \frac{d^2y}{\Delta t^2}$, die Entfernung des bewegten Puncts von jener graden Linie in der Richtung der Kraft als Ordinate y erscheint. Die Stärke dieser parallel wirkenden Kraft, welche daher Parallelkraft heißen mag, kann als vom Raume y abhängig angesehen werden, und man hat also:

$$\frac{d^2y}{\Delta t^2} = \varphi(y).$$

2) Die Kraft wird als Centralkraft angesehen, sie wirkt immer nach einem und demselben Puncte, und ihre Richtung verändert sich daher in jedem Augenblicke. Hier hat man also die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{d^2 x} = \frac{y}{x}.$$

Krummlinige Bewegung eines Körpers im leeren Raume, welcher durch eine Parallelkraft getrieben wird.

§. 265.

Um die Curve zu bestimmen, welche ein Körper, durch eine Parallelkraft getrieben, beschreiben wird, denke man sich z. B. AP (Fig. 71.) als in der Horizontalfläche der Erde liegend, und PM, welche senkrecht auf AP ist, als die verticale Richtung der Kraft. Ein schwerer Körper werde in A unter einem Winkel CAP $= \varphi$ mit der Geschwindigkeit f aufwärts getrieben, so, daß er ohne die constante Kraft der Erde vermöge des Princips der Leblosigkeit in der Richtung AC gleichförmig und zwar mit der anfänglichen Geschwindigkeit f fortlaufen würde.

Die Kraft, welche in der Richtung PM thätig ist, haben wir constant angenommen und der Schwerkraft an der Oberfläche der Erde, d. h. $= 2g$ gesetzt, und da diese den Körper anziehet, also bestrebt ist, ihn von seiner anfänglichen Richtung nach oben abzulenken, d. h. gegen die Richtung der Geschwindigkeit wirkt, so muß sie negativ genommen werden. Man hat also:

$$\frac{d^2 y}{\Delta t^2} = -2g,$$

und da dieses die einzige Kraft ist, welche hier wirken soll, so ist:

$$\sqrt{\left[\left(\frac{d^2 y}{\Delta t^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 x}{\Delta t^2}\right)^2\right]} = \frac{d^2 y}{\Delta t^2}$$

d. h. es ist:

$$\frac{d^2 x}{\Delta t^2} = 0,$$

d. h. die Abscissenkraft ist $= 0$, daraus folgt:

$$\frac{d^2 x}{\Delta t} = 0 \text{ und } \frac{dx}{\Delta t} = \text{const.}$$

Diese Constante muß bestimmt werden. Die Geschwindigkeit, womit sich der Körper anfänglich in der Richtung AC zu bewegen bestrebt ist, ist $= f$. Zerlegt man diese in eine Abscissen- und Ordinatengeschwindigkeit, so ist die erste $= f \operatorname{Cos} \varphi$, die andere $= f \operatorname{Sin} \varphi$. Da nun $\frac{dx}{\Delta t}$ d. h. die Abscissengeschwindigkeit constant oder überall dieselbe ist, so hat man:

$$\frac{dx}{\Delta t} = f \operatorname{Cos} \varphi \text{ und } x = f \operatorname{Cos} \varphi . t + C.$$

Wenn noch keine Zeit verflossen ist, kann auch noch kein Raum beschrieben seyn, d. h. für $t = 0$ ist auch $x = 0$, daher auch $C = 0$, und also:

$$x = f \operatorname{Cos} \varphi . t.$$

Integrirt man die Gleichung $\frac{d^2 y}{\Delta t^2} = - 2g$, so hat man $\frac{d^2 y}{\Delta t} = - 2g \Delta t$ und $\frac{dy}{\Delta t} = - 2gt + C$, welches die Ordinatengeschwindigkeit ausdrückt. Für $t = 0$ ist diese $= f \operatorname{Sin} \varphi$ also $C = f \operatorname{Sin} \varphi$ und daher:

$$\frac{dy}{\Delta t} = - 2gt + f \operatorname{Sin} \varphi$$

und:

$$dy = f \operatorname{Sin} \varphi \Delta t - 2gt \Delta t$$

$$y = f \operatorname{Sin} \varphi . t - gt^2 + C.$$

Für $t = 0$ ist auch $y = 0$, daher auch $C = 0$. und

$$y = f \operatorname{Sin} \varphi . t - gt^2.$$

Jetzt hat man x und y durch t ausgedrückt, man kann daher t eliminiren, und erhält die Gleichung zwischen x und y, d. h. die Gleichung der Curve. Aus der Gleichung für x folgt $t = \frac{x}{f \operatorname{Cos} \varphi}$, substituirt man dieses in die Gleichung für y, so erhält man:

$$y = \frac{\operatorname{Sin} \varphi \, x}{\operatorname{Cos} \varphi} - \frac{g x^2}{f^2 (\operatorname{Cos} \varphi)^2}.$$

Man kann aus dieser Gleichung leicht die Linie AB oder die Weite des Wurfs, (amplitudo jactus), so wie auch die höchste Höhe, welche der Körper erreicht, d. h. die Höhe des Wurfs (altitudo jactus) finden.

Ist $y = 0$, so erhält man:

$$\frac{\text{Sin}\,\varphi\, x}{\text{Cos}\,\varphi} - \frac{g x^2}{f^2\ (\text{Cos}\,\varphi)^2}$$

$$x = \frac{f^2\ \text{Sin}\,\varphi.\ \text{Cos}\,\varphi}{g} = \frac{f^2\ \text{Sin}\,2\varphi}{2g} = AB.$$

Um die Abscisse zu erfahren, für welche die Ordinate y am größesten ist, setze man $\frac{dy}{\Delta x} = 0$ (§. 122.), woraus man erhält:

$$\frac{\text{Sin}\,\varphi}{\text{Cos}\,\varphi} - \frac{2 g x}{f^2\ (\text{Cos}\,\varphi)^2} = 0$$

$$x = \frac{f^2\ \text{Sin}\,\varphi\ \text{Cos}\,\varphi}{2g},$$

welches $= \frac{1}{2}AB$ ist. Ferner ist $\frac{d^2y}{\Delta x^2} = -\frac{2g}{f^2\ (\text{Cos}\,\varphi)^2}$, und da dieses negativ ist, so ist die Ordinate, welche in der Mitte von AB stehet, ein Maximum. Den Werth für diese Ordinate, d. h. den Ausdruck für die Höhe des Wurfs, erhält man, wenn man in die Gleichung der Curve für x den Werth $\frac{f^2\ \text{Sin}\,\varphi\ \text{Cos}\,\varphi}{2g} = \frac{f^2\ \text{Sin}\,2\varphi}{4g}$ substituirt, woraus man erhält:

$$y = \frac{(\text{Sin}\,\varphi)^2 f^2}{2g} - \frac{(\text{Sin}\,\varphi)^2 f^2}{4g} = \frac{f^2\ (\text{Sin}\,\varphi)^2}{4g}$$

$= ED.$

Um den Winkel φ zu finden, unter welchem der Körper geworfen werden muß, damit AB oder ED ein Maximum werde, so betrachte man in

$$AB = \frac{f^2\ \text{Sin}\,2\varphi}{2g} \text{ und } ED = \frac{f^2\ \text{Sin}\,\varphi^2}{4g}$$

den Winkel φ als Gelegenheit, bei welcher AB und ED fließen, und man wird durch das Nullsetzen des ersten Differentialverhältnisses zu den verlangten Werthen von φ gelangen.

Die Curvengeschwindigkeit in einem gewissen Puncte ist:

$$\sqrt{\left(\left(\frac{dy}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{dx}{\Delta t}\right)^2\right)}$$
$$= \sqrt{\left(f^2 \operatorname{Cos}\varphi^2 + (f \operatorname{Sin}\varphi - 2gt)^2\right)}$$
$$= \sqrt{\left(f^2 \perp 4fg \operatorname{Sin}\varphi\, t + 4g^2 t^2\right)}.$$

Man kann diese Geschwindigkeit aber auch durch die Abscisse ausdrücken, indem man für t den Werth $\frac{x}{f \operatorname{Cos}\varphi}$ setzt, wodurch der Ausdruck:

$$\sqrt{\left(f^2 - 4g \operatorname{Tang}\varphi .\, x + \frac{4g^2 x^2}{f^2 \operatorname{Cos}\varphi^2}\right)} \text{ wird.}$$

Für $x = AB$ gesetzt, erhält man diese Geschwindigkeit in B: $= f$, für $x = \frac{1}{2} AB$ also in D ist sie wieder $= f \operatorname{Cos}\varphi$.

Versetzt man den Anfangspunct der Abscissen nach D, nimmt DF zur Abscissenrichtung, AE zur Richtung der Ordinaten an, so erhält man die Gleichung

$$u = \sqrt{\left(\frac{f^2 \operatorname{Cos}\varphi^2}{g} .\, w\right)},$$

so, daß also die gesuchte Linie eine Parabel ist, deren Parameter $= \frac{f^2 \operatorname{Cos}\varphi^2}{g}$ gefunden wird.

Krummlinige Bewegung eines Körpers in widerstehenden Mitteln, welcher durch eine Parallelkraft getrieben wird.

§. 266.

Das Medium in welchem sich der Körper bewegt, sey gleichförmig dicht, d. h. leiste überall bei gleicher Geschwindigkeit einen gleichen Widerstand, welcher sich übrigens verhalte, wie das Quadrat der Geschwindigkeit. Bedeutet f die Geschwindigkeit, bei welcher der Widerstand = 1 ist, so ist derselbe bei der Geschwindigkeit c, $= \frac{c^2}{f^2}$. Die constante Kraft der Schwere = A,*) wirke in der Richtung der Or=

*) Die Kraft der Schwere kann hier aus hydrostatischen Gründen nicht mehr = 2g seyn.

dinaten, welche wegen ihrer Richtung negativ genommen werden muß. Die Kraft des Widerstandes $= \frac{c^2}{f^2}$ ist eine Tangentialkraft, welche man sich durch MS (Fig. 72.) repräsentirt denken mag. Zerlegt man sie in eine Abscissenkraft MV, und in eine Ordinatenkraft MT, so ist die erste $= MS \operatorname{Cos} M = \frac{c^2}{f^2} \operatorname{Cos} M$, die andere $= \frac{c^2}{f^2} \operatorname{Sin} M$. Beide Kräfte wirken gegen die Bewegung, sind also negativ zu nehmen. Die gesammte Ordinatenkraft ist daher:

$$= -\frac{c^2}{f^2} \operatorname{Sin} M - A,$$

und da $\operatorname{Sin} M = \frac{dy}{ds}$ ist, wenn ds das Differential des Bogens bedeutet, so hat man:

$$\frac{d^2 y}{\Delta t^2} = -\left(\frac{c^2}{f^2}\frac{dy}{ds} + A\right).$$

Die Abscissenkraft ist allein $= -\frac{c^2}{f^2} \operatorname{Cos} M$ und da $\operatorname{Cos} M = \frac{dx}{ds}$ ist, so ist:

$$\frac{d^2 x}{\Delta t^2} = -\frac{c^2}{f^2}\frac{dx}{ds}.$$

Nun ist aber $c = \frac{ds}{\Delta t}$, daher allgemein:

$$\frac{d^2 y}{\Delta t^2} = -\left(\frac{ds}{f^2}\frac{dy}{\Delta t^2} + A\right)$$

und

$$\frac{d^2 x}{\Delta t^2} = -\frac{ds}{f^2}\frac{dy}{\Delta t^2},$$

und diese Formeln sind als Fundamentalgleichungen bei diesen Untersuchungen anzusehen. Es kömmt, um diese Aufgabe, welche das berühmte **ballistische Problem** ist, zu lösen, nur noch auf Integrationen an, wovon jedoch hier weiter nicht die Rede seyn kann.

Krummlinige Bewegung eines Körpers, welcher durch eine Centralkraft getrieben wird.

§. 267.

Hier hat man:

$$\frac{d^2 y}{d^2 x} = \frac{y}{x} \text{ also:}$$

$$x\, d^2 y - y\, d^2 x = 0 \text{ und daher auch:}$$

$$y \frac{d^2 x}{\Delta t} - x \frac{d^2 y}{\Delta t} = 0.$$

Diese Gleichung ist durch Differentiation der Gleichung $\frac{y\, dx - x\, dy}{\Delta t} = C$ entstanden, und es ist daher:

$$y\, dx - x\, dy = C\, \Delta t.$$

Nun ist aber das Differential der Sectorfläche CAM (Fig. 69.) =

$$dz = \frac{y\, dx - x\, dy}{2},$$

daher hat man

$$dz = \frac{C}{2} \Delta t \text{ und } z = \tfrac{1}{2} C.\, t,$$

d. h. bei jeder Centralkraft, welche es auch seyn mag, werden immer in gleichen Zeiten gleiche Sectoren beschrieben, wodurch also auf die Geschwindigkeit geschlossen ist.

§. 268.

Die Stärke der Kraft ist:

$$= \sqrt{\left(\left(\frac{d^2 y}{\Delta t^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 x}{\Delta t^2}\right)^2\right)},$$

welche Formel sich, wenn von einer Centralkraft die Rede ist, in:

$$\frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}\, d^2 x}{x\, \Delta t^2}$$

zusammenziehet.

Diese Kraft habe ihren Sitz in A (Fig. 73.), und ihre Stärke verhalte sich umgekehrt, wie das Quadrat der Entfernungen von A. Der bewegte Körper sey anfänglich in B; wird er der Wirkung der Kraft allein ausgesetzt, so wird er sich gradlinig nach A bewegen, und das Gesetz, nach welchem diese Bewegung geschiehet, ist §. 248. gezeigt. Erhält aber der Körper in B eine anfängliche Geschwindigkeit $= f$ in der Richtung BD, welche gegen BP unter einem Winkel $= \varphi$ geneigt ist, so hat er anfänglich ein Bestreben, sich in BD gleichförmig fortzubewegen, welches Bestreben jedoch durch die Centralkraft in A sogleich abgeändert wird, so, daß der Körper gezwungen ist, eine andere Bahn BM zu durchlaufen.

Die Kraft sey in der Entfernung $AC = h$ der Schwerkraft an der Oberfläche der Erde gleich, also $= 2g$, in einer andern Entfernung $AM = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ sey sie $= v$, so hat man:

$$\frac{v}{2g} = \frac{AC^2}{AM^2} = \frac{h^2}{x^2 + y^2},$$

und da diese Kraft anziehet, so ist:

$$v = - \frac{2g\ h^2}{(x^2 + y^2)}$$

und daher allgemein:

$$\frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}\ d^2 x}{x \triangle t^2} = - \frac{2g\ h^2}{(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{d^2 x}{x \triangle t^2} = - \frac{2g\ h^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}.$$

Durch Integration dieser Formel wird man zu der Gleichung zwischen x und y gelangen, oder das Gesetz der Curve BM dargestellt haben. Zuerst ist erfoderlich, daß man $\triangle t$ aus der Gleichung fortschaffe, wozu man sich der Gleichung $y\,dx - x\,dy = C \triangle t$ bedient. Die Größe C bedeutet eine Constante, deren nähere Bestimmung erst nöthig ist. Für $x = AB = - a$ ist $y = o$ und die Ordinatengeschwindigkeit oder $\frac{dy}{\triangle t}$ ist daselbst $= f \operatorname{Sin} \varphi$. Substituirt man diese Werthe, so hat man:

$$C = a f \operatorname{Sin} \varphi,$$

daher ist:

$$\Delta t = \frac{y\,dx - x\,dy}{a\,f\,\mathrm{Sin}\,\varphi}.$$

Wird dieser Werth in die obige Gleichung:

$$\frac{d^2x}{x\,\Delta t^2} = \frac{2g\,h^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \text{ oder } \frac{d^2x}{\Delta t} = -\frac{2g\,x\,\Delta t\,h^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

gesetzt, so erhält man

$$\frac{d^2x}{\Delta t} = -\frac{2g\;x\,h^2\,(y\,dx - x\,dy)}{a\,f\,\mathrm{Sin}\,\varphi\sqrt{(y^2+x^2)^3}}$$

$$= \frac{2gh^2\,\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}\right)}{a\,f\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\sqrt{(1+\frac{y^2}{x^2})^3}}$$

$$= \frac{2g\,h^2\,d\,(\frac{y}{x})}{a\,f\,\mathrm{Sin}\,\varphi\sqrt{(1+\frac{y^2}{x^2})^3}}$$

daher:

$$\frac{dx}{\Delta t} = \frac{2g\,h^2}{a\,f\,\mathrm{Sin}\,\varphi}.\int\frac{d\,(\frac{y}{x})}{\sqrt{(1+\frac{y^2}{x^2})^3}}$$

$$= \frac{2g\,h^2}{a\,f\,\mathrm{Sin}\,\varphi}\cdot\frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{(1+\frac{y^2}{x^2})}} + \mathrm{Const.}$$

Für $x = -a$ ist $y = 0$ und die Abscissengeschwindigkeit oder $\frac{dx}{\Delta t}$ hat den Werth $f\,\mathrm{Cos}\,\varphi$, daher ist: $f\,\mathrm{Cos}\,\varphi = \mathrm{Const.}$ und also:

$$\frac{dx}{\Delta t} = \frac{2g\,h^2}{a\,f\,\mathrm{Sin}\,\varphi}\cdot\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}} + f\,\mathrm{Cos.}\,\varphi.$$

Um x zu erhalten, muß man noch einmal integriren. Transponirt man Δt und setzt dafür seinen Werth:

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{a\,f\,\mathrm{Sin}\,\varphi} = -\frac{x^2\,(x\,dy - y\,dx)}{x^2\,a\,f\,\mathrm{Sin}\,\varphi}$$

$$= -\frac{x^2\,d\,(\frac{y}{x})}{a\,f\,\mathrm{Sin}\,\varphi},$$

so erhält man:

$$dx = -\frac{2g\,h^2}{(a\,f\,\mathrm{Sin}\,\varphi)^2} \cdot \frac{x^2 y \,.\, d\left(\frac{y}{x}\right)}{x\sqrt{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}} - \frac{x^2\,f\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{a\,f\,\mathrm{Sin}\,\varphi}\, d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{dx}{x^2} = -\frac{2g\,h^2}{(a\,f\,\mathrm{Sin}\,\varphi)^2} \cdot \frac{y\,d\left(\frac{y}{x}\right)}{x\sqrt{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}} - \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi\, d\left(\frac{y}{x}\right)}{a\,\mathrm{Sin}\,\varphi}$$

also:

$$-\frac{1}{x} = -\frac{2g\,h^2}{(a\,f\,\mathrm{Sin}\,\varphi)^2} \int \frac{\frac{y}{x} d\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}} - \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi}{a\,\mathrm{Sin}\,\varphi} \cdot \frac{y}{x}$$

$$= -\frac{2g\,h^2}{(a\,f\,\mathrm{Sin}\,\varphi)^2} \sqrt{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)} - \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi \,.\, y}{a\,\mathrm{Sin}\,\varphi \,.\, x} + \mathrm{Const.}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{2g\,h^2 \sqrt{(x^2+y^2)}}{(a\,f\,\mathrm{Sin}\,\varphi)^2 \,.\, x} + \frac{y\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{x\,a\,\mathrm{Sin}\,\varphi} + \mathrm{Const.}$$

Für $x = -a$ ist $y = 0$ und $\sqrt{(x^2 + y^2)}$ ist der Radiusvector $AB = +a$, daher:

$$-\frac{1}{a} = -\frac{2g\,h^2}{(a\,f\,\mathrm{Sin}\,\varphi)^2} + C. \text{ und } C = \frac{2g\,h^2}{(a\,f\,\mathrm{Sin}\,\varphi)^2} - \frac{1}{a},$$

daher:

$$\frac{1}{x} = \frac{2g\,h^2}{(a\,f\,\mathrm{Sin}\,\varphi)^2} - \frac{1}{a} + \frac{2g\,h^2\sqrt{(x^2+y^2)}}{(a\,f\,\mathrm{Sin}\,\varphi)^2\,x} + \frac{y\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,.\,f}{x\,a\,.\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,.\,f}$$

$$a\,f\,\mathrm{Sin}\,\varphi = \left(\frac{2g\,h^2}{a\,f\,\mathrm{Sin}\,\varphi} - f\,\mathrm{Sin}\,\varphi\right)x + \frac{2g\,h^2\sqrt{(x^2+y^2)}}{a\,f\,\mathrm{Sin}\,\varphi}$$

$$+ \,y\,f\,\mathrm{Cos}\,\varphi.$$

Dieses ist eine Gleichung des zweiten Grades, und $\sqrt{(x^2 + y^2)}$ bedeutet den Radiusvector; sie kann durch eine Coordinatenverwandlung so umgeformt werden, daß sie die Gestalt: $\sqrt{(x^2 + y^2)} = a + bx$ annimmt, dann ist die Abscissenrichtung die Axe des Kegelschnitts, und der Anfangspunct der Brennpunct desselben. Um dieses zu leisten, nehme man an, der Anfangspunct C bleibe derselbe, aber die Abscissenrichtung werde um den Winkel $QCP = \psi$ (Fig. 74.) verändert. Man hatte $CP = x$, $PM = y$ jetzt wird CQ die neue Abscisse, w, QM die neue Ordinate u. Es ist aber:

$$RQ = MQ \,\mathrm{Tang}\, RMQ = u \,\mathrm{Tang}\, \psi$$

$$MR = \frac{MQ}{\mathrm{Cos}\, RMQ} = \frac{u}{\mathrm{Cos}\, \psi}.$$ Ferner ist:

$$CR = w - u \,\mathrm{Tang}\, \psi$$ und

$$RP = CR \,\mathrm{Sin}\, \psi = (w - u \,\mathrm{Tang}\, \psi) \,\mathrm{Sin}\, \psi.$$

Eben so findet man:

$$CP = x = CR \,\mathrm{Cos}\, \psi = (w - u \,\mathrm{Tang}\, \psi) \,\mathrm{Cos}\, \psi$$
$$= w \,\mathrm{Cos}\, \psi - u \,\mathrm{Sin}\, \psi.$$

Nun ist:

$$y = PR + RM = (w - u \,\mathrm{Tang}\, \psi) \,\mathrm{Sin}\, \psi + \frac{u}{\mathrm{Cos}\, \psi}$$

$$= w \,\mathrm{Sin}\, \psi + u \left(\frac{1}{\mathrm{Cos}\, \psi} - \frac{\mathrm{Sin}\, \psi^2}{\mathrm{Cos}\, \psi}\right) = w \,\mathrm{Sin}\, \psi + u \,\mathrm{Cos}\, \psi.$$

Diese Werthe von y und x müssen in obige Gleichung substituirt werden. Aus der Figur ist aber: $CP^2 + PM^2 = CM^2 = CQ^2 + QM^2$, d. h. es ist:

$$x^2 + y^2 = w^2 + u^2.$$

Die oben gefundene Gleichung ist aber, wenn man für die Coefficienten von $\sqrt{(x^2 + y^2)}$, y und x die Zeichen A, B, C gebraucht:

$$a f \,\mathrm{Sin}\, \varphi = Cx + A\sqrt{(x^2 + y^2)} + By,$$

also erhält man:

$$a f \,\mathrm{Sin}\, \varphi = C(w \,\mathrm{Cos}\, \psi - u \,\mathrm{Sin}\, \psi) + A\sqrt{(w^2 + u^2)}$$
$$+ B(w \,\mathrm{Sin}\, \psi + u \,\mathrm{Cos}\, \psi),$$

daher ist:

$$A\sqrt{(w^2 + u^2)} = a f \,\mathrm{Sin}\, \varphi - C(w \,\mathrm{Cos}\, \psi - u \,\mathrm{Sin}\, \psi)$$
$$- B(w \,\mathrm{Sin}\, \psi + u \,\mathrm{Cos}\, \psi)$$

$$= a f \,\mathrm{Sin}\, \varphi + u.(C \,\mathrm{Sin}\, \psi - B \,\mathrm{Cos}\, \psi) - w(C. \,\mathrm{Cos}\, \psi$$
$$+ B \,\mathrm{Sin}\, \psi).$$

Wir werfen nun die Frage auf, wie der Winkel ψ beschaffen seyn müsse, damit $A\sqrt{(w^2 + u^2)}$ eine Form des ersten Grades, nämlich $= \alpha + \beta w$ werden kann. Dieses geschiehet offenbar dadurch, daß man den Coefficienten von u in obiger Gleichung zu o werden läßt; dann hat man:

$$B \operatorname{Cos} \psi = C \operatorname{Sin} \psi \text{ d. h. } \operatorname{Tang} \psi = \frac{B}{C}.$$

Ist daher der Winkel ψ so groß, daß seine Tangente $= \frac{B}{C}$ ist, so wird die neue Abscissenrichtung die Axe des Kegelschnitts seyn. Dann ist also die Gleichung:

$$A \sqrt{(w^2 + u^2)} = a f \operatorname{Sin} \varphi - (C \operatorname{Cos} \psi + B \operatorname{Sin} \psi) w.$$

Nun ist aber $\operatorname{Sin} \psi = \operatorname{Cos} \psi \cdot \frac{B}{C}$ und $\operatorname{Cos} \psi = \frac{1}{\operatorname{Sec} \psi}$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1 + \operatorname{Tang} \psi^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{B^2}{C^2})}} = \frac{C}{\sqrt{(C^2 + B^2)}},$$

folglich:

$$A \sqrt{(w^2 + u^2)} = a f \operatorname{Sin} \varphi - \operatorname{Cos} \psi (C + \frac{B^2}{C}) w$$

$$= a f \operatorname{Sin} \varphi - \frac{(C^2 + B^2) w}{\sqrt{(C^2 + B^2)}} = a f \operatorname{Sin} \varphi - \sqrt{(C^2 + B^2)} w.$$

Der Radiusvector ist also eine Form des ersten Grades, woraus folgt, daß die Curve, welche ein Körper beschreibt, der durch eine Centralkraft getrieben wird, deren Stärke sich umgekehrt, wie das Quadrat der Entfernungen verhält, ein Kegelschnitt ist, in dessen Brennpuncte die treibende Kraft ihren Sitz hat.

Drückt man u durch w aus, so hat man:

$$A^2 (u^2 + w^2) = a^2 f^2 \operatorname{Sin} \varphi^2 - 2 a f \operatorname{Sin} \varphi . \sqrt{(C^2 + B^2)} w + (C^2 + B^2) w^2$$

$$u = \frac{1}{A} \sqrt{[a^2 f^2 \operatorname{Sin} \varphi^2 - 2 a f \operatorname{Sin} \varphi \sqrt{(C^2 + B^2)} w + (C^2 + B^2 - A^2) w^2]}.$$

Ob nun die Curve eine Parabel, Ellipse, oder Hyperbel seyn soll, das hängt von dem Coefficienten von w^2 ab; ist derselbe $= 0$, so ist die Curve eine Parabel, ist er nega=

tiv, eine Ellipse, und ist er endlich positiv, eine Hyperbel. Dieser Coefficient ist aber

$$C^2 + B^2 - A^2 = f^2 \operatorname{Cos}\varphi^2 - \frac{h^4}{(a f \operatorname{Sin}\varphi)^2}$$

$$+ \left(\frac{h^2}{a f \operatorname{Sin}\varphi} - f \operatorname{Sin}\varphi\right)^2$$

$$= f^2 \operatorname{Cos}\varphi^2 - \frac{h^4}{(a f \operatorname{Sin}\varphi)^2} + \frac{h^4}{(a f \operatorname{Sin}\varphi)^2} - 2 \frac{h^2 f \operatorname{Sin}\varphi}{a f \operatorname{Sin}\varphi}$$

$$+ f^2 \operatorname{Sin}\varphi^2 = f^2 - \frac{2h^2}{a}.$$

Ist daher $f^2 = \frac{2h^2}{a}$, so ist die Curve eine Parabel, ist $f^2 < \frac{2h^2}{a}$, eine Ellipse, ist endlich $f^2 > \frac{2h^2}{a}$, eine Hyperbel.

Nun bedeutet aber h die Entfernung AC vom Puncte A, wo die Kraft der der Schwere gleich ist, also $= 2g$; a bedeutet die anfängliche Entfernung des Körpers von dem Sitze der Kraft. Es kann daher durch $\frac{2h^2}{a}$ wieder eine gewisse Länge verstanden werden, und es ist klar, daß man sich f^2 oder das Quadrat der anfänglichen Geschwindigkeit des Körpers eben so groß als die Länge $\frac{2h^2}{a}$ denken könne, daß man sich dieses aber auch eben so gut größer und kleiner vorstellen könne, als $\frac{2h^2}{a}$, und daß daher bei obiger Annahme in Beziehung auf die Kraft, sowohl eine Parabel, als auch eine Ellipse und Hyperbel beschrieben werden könne.

§. 269.

Aus früheren Betrachtungen ging hervor, daß die Wurfslinie im leeren Raume eine Parabel sey; wir wollen jetzt zeigen, daß sie, streng genommen, eine Ellipse ist. Die Anziehungskraft der Erde kann als im Centrum derselben vereinigt gedacht werden, und sie verhält sich umgekehrt, wie das Quadrat der Entfernungen. Aus A (Fig. 75.) werde unter den Winkel DAB ein Körper mit der Geschwindigkeit $= f$ in die Höhe geworfen, so ist die Linie AF vom zweiten

Grade, und es kömmt hier noch auf den Factor $f^2 - \frac{2h^2}{a}$ an, ob sie eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel sey. Die Größe h ist hier der Halbmesser der Erde, a, als die anfängliche Entfernung des Körpers vom Centrum, gleichfalls, daher ist jetzt der Factor: $f^2 - 2r$. Gebraucht man statt f die Fallhöhe k (§. 247.), so ist $f^2 = 4gk$, daher der Factor $4gk - 2r$. Hier ist aber unstreitig $4gk$ kleiner, als $2r$ oder $k < \frac{r}{2g}$, denn eine solche Geschwindigkeit, welche ein Körper erhalten würde, der durch den Raum $\frac{r}{2g}$ gefallen wäre, wird man dem geworfenen Körper anfänglich nicht ertheilen können. Daher ist der Factor negativ, und also die Curve eine Ellipse.

§. 270.

Wir haben bei der vorhergehenden Untersuchung die durch die angenommene Kraft zu beschreibende Curve als Orthogonale gedacht; will man sie als Spirale betrachten, so hat man, da die auf den Radiusvector senkrecht wirkende Kraft $= \frac{2dz\,d\varphi + z\,d^2\varphi}{\triangle t^2}$ gefunden ist, und hier nur eine Centralkraft in der Richtung des Radiusvector thätig seyn soll, die Gleichung:

$$\frac{2dz\,d\varphi + z\,d^2\varphi}{\triangle t^2} = 0.$$

Die Kraft, welche in der Richtung des Radiusvector wirkt, ziehet an, und ihre Stärke verhält sich umgekehrt, wie das Quadrat der Entfernungen von C (Fig. 76.). Ist CD, $= h$, die Entfernung, in welcher jene Kraft der der Schwere gleich ist, so hat man den Ausdruck:

$$\frac{d^2z - z\,d\varphi^2}{\triangle t^2} = -\frac{h^2}{z^2}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt,

$$\frac{2z\,dz\,d\varphi + z^2\,d^2\varphi}{\triangle t} = 0,$$

d. h.

$$\frac{d\,(z^2\,d\varphi)}{\Delta t} = 0 \text{ und } \frac{z^2\,d\varphi}{\Delta t} = \text{Const.}$$

aus welcher Gleichung wieder folgt, daß die Flächensectoren mit der Zeit t gleichförmig wachsen. Man kann durch diese Beziehung Δt aus der andern Gleichung fortschaffen, und erhält:

$$\frac{C^2\,(d^2 z - z\,d\varphi^2)}{z^4\,d\varphi^2} = -\frac{h^2}{z^2},$$

und so gelangt man durch ganz ähnliche Betrachtungen wieder zu demselben Resultate.

Bewegung eines Körpers auf vorgeschriebenem Wege.

§. 271.

Man denke sich eine feste krumme Linie MB (Fig. 77.), auf welcher ein Körper, sey er durch anfänglichen Stoß in Bewegung gesetzt, oder werde er durch immerwährende Kräfte getrieben, hinzugleiten gezwungen ist. Der Körper würde in jedem Puncte M in der Richtung, welche ihn die Curve hier ertheilt hat, d. h. in der Richtung der Tangente MT fortgehen, wenn ihn nicht die Festigkeit der Curve davon abhielte. Denkt man sich daher die den Körper treibenden Kräfte als Tangential- und Normalkraft, so ist die erstere die, mit welcher der Körper in der Richtung der Tangente fortgerissen wird, die andere diejenige, welche den Körper von der Richtung abzulenken strebt, und welche die Festigkeit der Curve selbst darbietet. Man hat aber für die Tangentialkraft den Ausdruck $T = \frac{dc}{\Delta t}$, wenn c die Curvengeschwindigkeit bedeutet, für die Normalkraft aber den Ausdruck: $\frac{c^2}{r}$ (§. 157.). Wenn man für die Geschwindigkeit c die Fallhöhe h gebrauchen will, so ist $h = \frac{c^2}{4g}$ und also $c = 2\sqrt{hg}$

(§. 247.) daher $dc = dh\sqrt{\frac{g}{h}}$. Man hat also die Tangentialkraft:

$$= \frac{dh\sqrt{\frac{g}{h}}}{\frac{c}{2}\triangle t} = \frac{\sqrt{g}.\, dh}{\sqrt{h}.\, \triangle t}$$

$$= \frac{2g\, dh}{c\triangle t} = \frac{2g\, dh}{ds}.$$

Ferner ist die Normalkraft: $= \frac{4hg}{r}$. Der Körper übt also auch senkrecht auf die Curve eine Gewalt $= \frac{4hg}{r} = \frac{c^2}{r}$ aus, welche dieselbe aufnimmt, und da Wirkung und Gegenwirkung gleich ist, so übt auch umgekehrt die feste Curve auf den Körper diese Kraft aus. Ist die Bahn, welche ein Körper durchläuft, wie hier, eine feste, so nennt man die Normalkraft auch **Schwungkraft**.

§. 272.

Wenn auf den Körper keine immerwährende Kräfte wirken, sondern die Bewegung nur durch eine dem Körper anfänglich ertheilte Geschwindigkeit hervorgebracht wird, so fällt die Tangentialkraft weg, d. h. man hat $T = \frac{dc}{\triangle t} = 0$ oder $c = \text{const.}$, d. h. die Geschwindigkeit in der Curve bleibt immer dieselbe. Denkt man sich aber, daß auf den Körper noch eine Kraft p thätig ist, die z. B. als Parallelkraft in der Richtung der Abscissen AP wirkt, so kann man sich die Kraft p in eine Tangential- und Normalkraft zerlegt vorstellen. Die Tangentialkraft ist alsdann $= p \operatorname{Cos} QMT = p \operatorname{Cos} MTP$. Nun ist aber $\operatorname{Sec} MTP = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$ also

$$\operatorname{Cos} MTP = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}} = \frac{dx}{ds}.$$

Daher die Tangentialkraft:

$$\frac{dc}{\triangle t} = p\,\frac{dx}{ds} = \frac{2g\, dh}{ds},$$

also:

$$p\,dx = 2g\,dh.$$

Es kann nun p constant seyn, z. B. der Kraft der Schwere 2g gleich, oder auch als Function von x angesehen werden, dann hat man im ersten Falle: $x = h + \text{Const.}$, im andern: $\int \varphi(x)\,dx = 2gh + \text{Const.}$ Man erhält also h oder die Fallhöhe als Function von x; die Geschwindigkeit hängt daher nicht von der Gleichung der Curve ab, sondern nur von der Abscisse x oder der Tiefe AP, durch welche der Körper gefallen ist. Ist $p = 2g$, so erhält man $x = h + \text{Const.}$, für $x = 0$ ist auch $h = 0$, also auch $\text{Const.} = 0$. Die Fallhöhe h ist überall $= x$, d. h. der Körper hat in M eine Geschwindigkeit, als wenn er durch den Raum AP frei herabgefallen wäre. Es mögen daher Bm, Bn, Br (Fig. 18.) beliebige Curve bedeuten, der Körper wird in R, wenn er von r herabfiel, dieselbe Geschwindigkeit haben, als in M, wenn er von m bis M, oder in N, von n bis N, oder in P, wenn er ganz frei von A bis P gefallen wäre. Kommen alle Curven in B zusammen, so wird der Körper, er mag durch jede beliebige dieser Curven gefallen seyn, in B immer dieselbe Geschwindigkeit, nämlich die, welche durch die Fallhöhe AB ausgedrückt wird, erlangt haben, und die Geschwindigkeit selbst wird dort $= 2\sqrt{g\,AB}$ seyn.

Man hat also allgemein, wenn p die Kraft ist:

$$h = \frac{1}{2g}\int p\,dx \text{ oder } c = \sqrt{(2\int p\,dx)}$$

als Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Abscisse. Setzt man für c seinen Werth $\frac{ds}{\Delta t}$, so ist:

$$\Delta t = \frac{ds}{\sqrt{(2\int p\,dx)}},$$

welches die Gleichung zwischen Zeit und Abscisse darbietet.

Es ist für die Folge bequemer, den Anfangspunct der Coordinaten im tiefsten Puncte B (Fig. 79.) anzunehmen. Sey demnach $AB = a$, die Bogenlänge $CB = k$, so ist die neue Abscisse $BP = X = a - x$, der dazu gehörende

Bogen $BM = S = k - s$, also $dx = -dX$, $ds = -dS$.
Daher sind obige Formeln:

$$h = -\frac{1}{2g}\int p\,dX \text{ oder } c = -\sqrt{(2\int p\,dX)}$$

und

$$\triangle t = -\frac{dS}{\sqrt{(2\int - p\,dX)}}.$$

§. 273.

Die Kraft p sey constant und der Schwere gleich, und die Bewegung fange im Puncte B der Curve, dessen Abscisse $= a$ ist, wo der Körper noch keine Anfangsgeschwindigkeit habe, an; es soll die Geschwindigkeit des Körpers an irgend einer Stelle M, so wie auch die Zeit berechnet werden, welche verfließen mußte, während der Körper den Bogen BM durchlief. Die Geschwindigkeit ergiebt sich leicht, es ist:

$$h = -\frac{1}{2g}\int 2g\,dX = -X + \text{Const.}$$

Für $X = a$ ist $h = 0$, also Const. $= a$; daher $h = a - X$. $= CP$, wie wir auch schon oben fanden. Um die Zeit t als Function von X zu erhalten, hat man:

$$\triangle t = -\frac{dS}{\sqrt{(2\int - 2g\,dX)}} = -\frac{dS}{\sqrt{(4g\,(a - X))}}.$$

Will man also die Gleichung zwischen t und X wirklich darstellen, so muß sich dieser Ausdruck integriren lassen, d. h. es muß S als Function von X also die Gleichung der Curve gegeben seyn. Sey diese zuerst eine grade Linie, so hat man, wenn $AC = a$, $AP = X$, $PM = y$, $AM = S$ ist, $y = X \text{ Tang} A$, $S = X \text{ Sec. } A = \frac{X}{\text{Cos } A}$ daher $dS = \frac{dX}{\text{Cos } A}$ und also:

$$\triangle t = -\frac{dX}{2 \text{ Cos } A \sqrt{(g\,(a - X))}} \text{ und}$$

$$t = -\frac{1}{2 \text{ Cos } A}\int\frac{dX}{\sqrt{(g\,(a - X))}} = \frac{\sqrt{(g\,(a - X))}}{g \text{ Cos } A}$$

$$= \frac{\sqrt{(a - X)}}{\text{Cos } A.\,\sqrt{g}} + \text{Const.}$$

Für $X = a$ ist $t = o$, daher auch $Const. = o$, und also

$$t = \frac{\sqrt{(a - X)}}{Cos\,A \sqrt{g}} = \sqrt{\left(\frac{a - X}{g\,Cos\,A^2}\right)}.$$

Nun ist aber $a - X = Mc$ also $\frac{a - X}{Cos\,A} = MB$ und $\frac{MB}{Cos\,A} = Me$, wenn der Winkel ABE ein rechter ist, daher: $t = \sqrt{\frac{Me}{g}}$. Dieses ist aber die Zeit, welche ein Körper gebraucht, um den Raum Me frei zu durchfallen, denn die Gleichung folgt aus: $Me = gt^2$, folglich fällt ein Körper frei durch Me in eben der Zeit, in welcher er auf der Ebene BM hinabgleitet. Die Zeit des ganzen Niederganges durch BA ist also $= \sqrt{\frac{AE}{g}}$. Ist also PC oder $Mc = w$, so hat man $t = \sqrt{\frac{w}{g\,Cos\,A^2}}$ oder $w = g\,Cos\,A^2\,t^2$. Nennt man $BM = z$, so, daß $z = \frac{MC}{Cos\,A} = \frac{w}{Cos\,A}$ ist, so hat man: $z = Cos\,A.\,gt^2$; will man endlich statt des Winkels BAE den Winkel BAD brauchen, so erhält man: $w = gt^2\,Sin\,A^2$, $z = gt^2\,Sin\,A$.

Da nun im Halbkreise alle Peripheriewinkel rechte sind, so wird ein Körper durch jede Linie AE, BE, CE u. s. w. (Fig. 81.) in eben der Zeit niedergleiten, in welcher er durch den verticalen Durchmesser ED frei fallen würde, nämlich in der Zeit $\sqrt{\frac{2r}{g}}$, wenn r der Radius ist.

§. 274.

Es möge nun die Bewegung in einem Kreise betrachtet werden. Es sey $BP = x$, $PM = y$ (Fig. 79.), so hat man:

$$y = \sqrt{(2rx - x^2)},$$

wenn AB durch den Mittelpunct gehet. Folglich ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r - x}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

und:

$$ds = dx \sqrt{\left(1 + \frac{(r - x)^2}{2rx - x^2}\right)} = \frac{r\,dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}},$$

daher:

$$\Delta t = - \frac{r\,dx}{2\sqrt{(2rx - x^2)}\sqrt{(g(a-x))}}$$

wo $a = AB$ ist, wenn die Bewegung von C anfangen soll.

Diese Form entziehet sich aber der Integration, man ist daher gezwungen, sich mit einer Näherung zu begnügen. Die Anwendungen, welche man von diesen Untersuchungen macht, gehen auf das Pendel, und dabei ist der Bogen BC als sehr gering anzusehen.

Es ist:

$$t = \int - \frac{r\,dx}{2\sqrt{(2rx - x^2)}\sqrt{(g(a-x))}}$$

$$= - \frac{r}{2\sqrt{g}} \int \frac{dx}{\sqrt{(2rx - x^2)}\sqrt{(a-x)}}$$

$$= - \frac{r}{2\sqrt{g}} \int \frac{dx}{\sqrt{(2r - x)}\sqrt{(ax - x^2)}}$$

$$= - \frac{r}{2\sqrt{g}} \int \frac{dx\,(2r - x)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(ax - x^2)}}$$

$$= - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2g}} \int \frac{dx\,(1 - \frac{x}{2r})^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(ax - x^2)}}.$$

Nun ist aber, wenn man $(1 - \frac{x}{2r})^{-\frac{1}{2}}$ durch den binomischen Lehrsatz entwickelt:

$$(1 - \frac{x}{2r})^{-\frac{1}{2}} = 1 - \overset{1}{A}\,\frac{x}{2r} + \ldots + (-1)^h\,\overset{h}{A}\,(\frac{x}{2r})^h \ldots$$

aber man hat allgemein:

$$\overset{h}{A} = \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2} - 1)\ldots(-\frac{1}{2} - (h-1))}{h(h-1)\ldots 2\,.\,1}$$

$$= (-1)^h\,\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1)\ldots(\frac{1}{2} + (h-1))}{h(h-1)\ldots 2\,.\,1}$$

$$= (-1)^h\,\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\ldots\frac{2h-1}{2}}{h(h-1)\ldots 2\,.\,1}$$

$$= (-1)^h\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2h-1)}{2^h\;1\cdot 2\cdot 3\ldots h}$$

$$= (-1)^h\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2h-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2h},$$

daher:

$$(-1)^h \overset{h}{A} \left(\frac{x}{2r}\right)^h = \frac{1.3.5..(2h-1)}{2.4.6..2h} \left(\frac{x}{2r}\right)^h.$$

Das hte Glied von $\frac{dx\,(1 - \frac{x}{2r})^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(ax-x^2)}}$ ist daher:

$$= \frac{1.3.5...(2h-1)}{2.4.6...2h.(2r)^h} \cdot \frac{x^h\,dx}{\sqrt{(ax-x^2)}}$$

und das hte Glied von t, welches wir durch $\overset{h}{\mathfrak{T}}t$ bezeichnen wollen, findet man also:

$$\overset{h}{\mathfrak{T}}t = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \frac{1.3.5..(2h-1)}{2.4.6..2h.(2r)^h} \int \frac{x^h\,dx}{\sqrt{(ax-x^2)}}$$

Für den Kreis mit dem Durchmesser a ist:

$$\frac{\sqrt{(ax-x^2)}}{\frac{1}{2}a} = \text{Sin DCE} = \text{Sin}\,\varphi \text{ (Fig. 82.)}$$

also

$$\text{Cos}\,\varphi = \sqrt{\left(1 - \frac{ax-x^2}{\frac{1}{4}a^2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}a - x}{\frac{1}{2}a}$$

daher ist: $x = \frac{1}{2}a(1 - \text{Cos}\,\varphi)$, $dx = \frac{1}{2}a\,\text{Sin}\,\varphi\,d\varphi$.

Wird nun dieses für x und dx substituirt, so erhält man:

$$\overset{h}{\mathfrak{T}}t = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \frac{1.3.5..(2h-1)}{2.4.6..2h(2r)^h} \times$$

$$\int \frac{(\frac{1}{2}a(1-\text{Cos}\,\varphi))^h\ \frac{1}{2}a\,\text{Sin}\,\varphi\,d\varphi}{\frac{1}{2}a\,\text{Sin}\,\varphi}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \frac{1.3..(2h-1)}{2.4..2h(2r)^h} \int (\tfrac{1}{2}a(1-\text{Cos}\,\varphi))^h\,d\varphi$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \frac{1.3...(2h-1)a^h}{2.4..2h(2r)^h} \int (\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\varphi)^{2h}\,d\varphi.$$

Setzt man $\frac{1}{2}\varphi = \psi$, so ist $d\varphi = 2 d\psi$ also:

$$\overset{h}{\mathfrak{T}}t = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \ldots (2h-1)a^h}{2 \cdot 4 \ldots 2h\,(2r)^h} \cdot 2\int (\mathrm{Sin}\,\psi)^{2h}\, d\psi.$$

Nun ist aber nach §. 77.

$$\int (\mathrm{Sin}\,\psi)^{2h}\, d\psi = -\frac{1}{2h}(\mathrm{Sin}\,\psi)^{2h-1}\,\mathrm{Cos}\,\psi$$

$$-\frac{2h-1}{2h\,(2h-2)}(\mathrm{Sin}\,\psi)^{2h-3}\,\mathrm{Cos}\,\psi$$

$$\ldots - \frac{(2h-1)\ldots 3}{2h\,(2h-2)\ldots 2}\,\mathrm{Sin}\,\psi \cdot \mathrm{Cos}\,\psi + \frac{(2h-1)\ldots 1}{2h\,(2h-2)\ldots}\,\psi.$$

Nennen wir die Glieder außer dem letzten, welches ψ enthält, R, so, daß also R für $\mathrm{Sin}\,\psi = 0$ verschwindet, so hat man:

$$\overset{h}{\mathfrak{T}}t = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \ldots (2h-1)\,a^h\, 2}{2 \cdot 4 \ldots 2h \cdot (2r)^h} \times$$

$$\left(R + \frac{(2h-1)\ldots 1}{2h\,(2h-2)\ldots 2}\,\psi\right) + C.$$

Für x = a hebt die Bewegung an, da ist also t, daher auch jedes Glied von t, = o. Ist aber x = a, so ist $\mathrm{Sin}\,\varphi = \mathrm{Sin}\,2\psi = \frac{\sqrt{(ax - x^2)}}{\frac{1}{2}a} = 0$ $\mathrm{Cos}\,\varphi = \mathrm{Cos}\,2\psi = \frac{\frac{1}{2}a - x}{\frac{1}{2}a} = -1$, also ist $\varphi = \pi$ und $\psi = \frac{1}{2}\pi$, daher hat man für x = a:

$$0 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \ldots (2h-1)\,a^h \cdot 2}{2 \cdot 4 \ldots 2h \cdot (2r)^h} \times$$

$$\cdot \frac{(2h-1)\ldots 1}{2h\,(2h-2)\ldots 2} \cdot \tfrac{1}{2}\pi + \mathrm{Const.}$$

$$\mathrm{Const.} = \sqrt{\frac{r}{2g}}\,\frac{[1 \cdot 3 \ldots (2h-1)]^2}{[2 \cdot 4 \ldots 2h]^2}\,\frac{a^h}{(2r)^h} \cdot \tfrac{1}{2}\pi,$$

daher:

$$\frac{\overset{h}{\mathfrak{T}}t}{\sqrt{\frac{r}{2g}}} = - \frac{1.3..(2h-1)a^h}{2.4..2h(2r)^h}\left[R + \frac{(2h-1)..1}{2h...2}\psi\right]$$
$$+ \frac{[1.3..(2h-1)]^2 a^h}{[2.4..2h]^2 (2r)^h} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Dieses ist also allgemein das hte Glied von t. Will man nun die Zeit des ganzen Niederganges durch den Bogen CB haben, so setze man $x = 0$, wodurch $\mathrm{Sin}\,\varphi = \mathrm{Sin}\,2\psi = 0$, $\mathrm{Cos}\,\varphi = \mathrm{Cos}\,2\psi = 1$ wird, hierdurch wird R und $\varphi = 0$, und es bleibt daher für $\overset{h}{\mathfrak{T}}t$ nur der Ausdruck für die Constante übrig. Daher hat man:

$$\overset{h}{\mathfrak{T}}t = \sqrt{\frac{r}{2g}}\,\frac{[1.3..(2h-1)]^2}{[2.4..2h]^2}\,\frac{a^h}{(2r)^h}\,\tfrac{1}{2}\pi,$$

und man erhält t selbst, indem man für h successiv die Werthe 0, 1, 2 .. substituirt, und die so erhaltenen Theile zu einer Reihe vereinigt. Diese Reihe wird stark convergiren, denn $\left(\frac{1.3..(2h-1)}{2.4..2h}\right)^2$ ist für jeden Werth von h ein echter Bruch. Dasselbe findet auch mit $\frac{a}{2r}$ statt, da a oder AB viel kleiner, als der Durchmesser des Kreises angenommen werden muß, wenn die Untersuchung reell auf Pendelschwingungen Bezug haben sollen. Jedes Glied hat den Factor $\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{r}{2g}}$ gemeinschaftlich; setzt man $h = 0$, um das Anfangsglied der Reihe zu erhalten, so weiß man aus der Lehre von den Facultäten, daß sowohl $1.3...(2h-1)$, als auch $2.4..2h, = 1$ ist, daher hat man für das Anfangsglied den Werth $\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{r}{2g}}$. Für das erste nach dem anfänglichen $(\frac{1}{2})^2\,\frac{a}{2r}\,\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{r}{2g}}$ u. s. f. Die Reihe ist daher:

$$\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{r}{2g}}\left[1 + (\tfrac{1}{2})^2\frac{a}{2r} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{a}{2r}\right)^2 ...\right]$$

und dieses ist die Zeit des ganzen Niederganges durch den Bogen CA (Fig. 83.). Da aber $\frac{a}{2r}$ ein sehr kleiner echter Bruch ist, und gegen die Einheit nicht in Betracht kommt, so kann man sich hier schon mit dem ersten Gliede begnügen, und man hat für die Zeit des ganzen Niederganges durch den Bogen AC den Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{r}{2g}}.$$

Der Körper durch constante Kraft getrieben, gehet durch den Bogen CA, und mit derselben Geschwindigkeit auf der andern Seite durch den gleichen Bogen Ac, so, daß die Zeit einer ganzen Pendelschwingung: =

$$T = \pi\sqrt{\frac{r}{2g}}$$

ist, wobei r die Länge des Pendels bedeutet.

Ist daher die Länge des Pendels und die Kraft $= 2g$ gegeben, so findet man die Zeit T; ist diese bekannt, so wie auch die Kraft, so findet man die Länge des Pendels =

$$r = \frac{2g\,T^2}{\pi^2}$$

und aus der Zeit und der Länge des Pendels endlich auch die constante Kraft =

$$2g = \frac{r\,\pi^2}{T^2},$$

d. h. 1) die Oscillationszeiten zweier Pendel verhalten sich, wie die Quadratwurzeln aus ihren Längen, wenn beide durch dieselbe constante Kraft getrieben werden.

2) Die Längen der Pendel verhalten sich also bei gleichen Kräften, wie die Quadrate der Oscillationszeiten.

3) Die Kräfte verhalten sich bei gleichen Längen umgekehrt, wie die Quadrate der Oscillationszeiten, und bei denselben Oscillationszeiten direct wie die Längen der Pendel.

Hieraus ist also klar, wie man durch die Längen der

Pendel untersuchen könne, ob die Kraft der Schwere unter verschiedenen Breiten der Erde verschieden sey. Der Sterntag ist nämlich auf allen Breiten von derselben Dauer, und es ist daher leicht, die Oscillationszeit z. B. eines Secundenpendels, d. h. die wahre Secunde in Sternzeit auf beliebigen Breiten auszumitteln; man kann alsdann die Länge r gleichfalls genau messen, und wird finden, daß dieselbe wandelbar ist, und geringer wird, je näher man dem Aequator kömmt. Die Schwerkraft ist also unter dem Aequator am schwächsten und an den Polen am stärksten.

§. 275.

Wir fanden oben für die Zeit, während welcher ein Körper durch eine beliebige Sehne eines Kreises mit dem Halbmesser r fällt, den Ausdruck $\sqrt{\frac{2r}{g}}$. Diese Zeit gilt auch für die kleinste Sehne, die man sich denken mag. Wer in der Differentialrechnung das unendlich Kleine annimmt, der setzt einen unendlich kleinen Bogen mit seiner Sehne als einerlei, und doch findet sich die Niedergangszeit durch die Sehne ganz anders, als durch den dazu gehörigen Bogen; denn da der Ausdruck für die Zeit, während welcher ein Körper durch einen beliebigen Bogen von der Höhe a fällt,

$$t = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{r}{2g}}\left[1 + (\tfrac{1}{2})^2\,\frac{a}{2r} + (\tfrac{1.3}{2.4})^2\,(\tfrac{a}{2r})^2 \ldots\right]$$

ist, so hat man t für einen unendlich kleinen Bogen, für welchen das a verschwindet:

$$t = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{r}{2g}},$$

und das Verhältniß der einen Zeit zur andern ist:

$$\frac{\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{r}{2g}}}{\sqrt{\frac{2r}{g}}} = \tfrac{1}{4}\pi.$$

Setzt man in obige Formel für t die Größe a wirklich

$= 0$, so erhält man $\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{r}{2g}}$, das hieße, ein Körper gebraucht eine Zeit, um keinen Raum zu durchlaufen, welches offenbar widersinnig scheinen muß. Man muß übrigens bedenken, daß dieses nicht die Zeit selbst ist, sondern nur die Gränze, welche t nicht überschreiten kann, wie klein auch a angenommen wird. Soll nämlich die Formel für $a = 0$ auch $t = 0$ geben, so muß t als Fluente, indem a abnimmt, successiv alle Werthe bis 0 durchlaufen, welches aber nicht geschehen kann, da, je kleiner der Bogen wird, sich derselbe desto mehr der horizontalen Richtung nähert, d. h. je geringer der zu durchlaufende Weg wird, desto langsamer wird die Bewegung seyn, und obgleich die Zeit t immer kleiner und kleiner werden muß, je kleiner der Bogen angenommen wird, so kann sie doch nie kleiner werden, als $\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{r}{2g}}$.

§. 276.

Es sey die Curve, in welcher ein Körper sich zu bewegen gezwungen ist, eine Cykloide. Die Gleichung dieser Linie ist, wenn r den Radius des erzeugenden Kreises bedeutet, und $AP = x$, $PM = y$ (Fig. 84.) gesetzt wird:

$$y = r \text{ Arc. Cos. } \frac{r-x}{r} + \sqrt{2rx - x^2}),$$

folglich hat man:

$$dy = \frac{\triangle x}{\sqrt{(1 - (\frac{r-x}{r})^2)}} + \frac{(r-x)\triangle x}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

$$= \frac{r\triangle x}{r\sqrt{(r^2 - (r-x)^2)}} + \frac{(r-x)\triangle x}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$$

$$= \frac{r\triangle x}{\sqrt{(2rx - x^2)}} + \frac{(r-x)\triangle x}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$$

$$= \frac{(2r-x)\triangle x}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = \frac{(2rx-x^2)\triangle x}{x\sqrt{(2rx-x^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(2rx-x^2)}\triangle x}{x} = \sqrt{(\frac{2r-x}{x})}\triangle x.$$

Um nun die Gleichung zwischen t und x zu erhalten, haben wir die Grundformel:

$$\triangle t = -\frac{ds}{\sqrt{(4g(a-x)}}.$$

Nun ist aber hier:

$$ds = \sqrt{(1 + \frac{2r-x}{x})}\, dx = \sqrt{(\frac{2r}{x})}\, dx,$$

folglich:

$$\triangle t = -\frac{\sqrt{(\frac{2r}{x})}\, dx}{\sqrt{(4g(a-x))}} = -\sqrt{(\frac{2r}{4g(ax-x^2)})}\, dx$$

$$t = -\sqrt{\frac{r}{2g}} \int \frac{dx}{\sqrt{(ax-x^2)}} = -\sqrt{\frac{r}{2g}} \,.\, 2 \text{ Arc. Tang} \sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

$$= -\sqrt{\frac{2r}{g}} \,.\, \text{Arc. Tang} \sqrt{\frac{x}{a-x}} + \text{Const.}$$

Für $x = a = AC$ ist $t = 0$, daher:

$$0 = -\sqrt{\frac{2r}{g}} \text{ Arc. Tang } \frac{\sqrt{a}}{0} + C.$$

$$\text{Const.} = \sqrt{\frac{2r}{g}} \,.\, \tfrac{1}{2}\pi,$$

daher:

$$t = -\sqrt{(\frac{2r}{g})}\, (\text{Arc. Tang} \sqrt{(\frac{x}{a-x})} - \tfrac{1}{2}\pi).$$

Setzt man, um die Zeit des ganzen Niederganges zu erhalten, $x = 0$, so erhält man:

$$t = \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{2r}{g}} = \pi \sqrt{\frac{r}{2g}}$$

= der Zeit, welche ein Körper gebraucht, um den Bogen MA, welcher zur Absciſſe AP gehört, zu durchlaufen. In dieser Formel kömmt aber das a nicht mehr vor, und A ist durch einen constanten Ausdruck gegeben, woraus folgt, daß jeder Bogen, MA, BA, bA immer in derselben Zeit von dem Körper durchlaufen wird. Vermöge dieser Eigenschaft wird die Cykloide curva tautochrona genannt.

Um ein Pendel CA so einzurichten, daß sich der Punct A bei den Schwingungen in der Cykloide BD (Fig. 85.) bewegt, kann man sich die Pendelstange AC als biegsam denken, und sich von C aus zwei feste Curven CE und CF construirt vorstellen, an welche sich die biegsame Pendelstange bei dem Oscilliren anlegt. Um diese Curven zu finden, hat man nur nöthig die Evolute der Cykloide zu suchen, welches, wie wir gesehen haben, die Cykloide selbst ist.

Ende des ersten Theils.

Gedruckt bei Johann Heinrich Meyer.

Verbesserungen.

Seite		
12	Zeile	14 v. oben, statt ${}^{1}+s\overset{n}{\mathfrak{B}}$, lies ${}^{1}+s\overset{1}{\mathfrak{B}}$
—	—	16 v. oben, st. ${}^{r}+{}^{1}\overset{n}{A}$, l. ${}^{r}+{}^{1}\overset{h}{A}$
—	—	18 v. oben, st. ${}^{r}\overset{n}{A}$, l. ${}^{r}\overset{h}{A}$
18	—	21 v. oben, st. $\triangle a^{m}$, l. $\triangle x^{m}$
60	—	3 v. unten, st. $a+b^{2}$, l. $a+bx^{2}$
88	—	7 u. 8 v. unten, st. $\frac{n\,(n-3)\,..\,1}{n\,(n-2)\,..\,2}$, l. $\frac{(n-1)\,(n-3)\,.\;1}{n\,(n-2)\,..\,2}$
—	—	9 v. unten, st. $\frac{n-1}{n-(n-2)}$, l. $\frac{n-1}{n\,(n-2)}$
93	—	5 v. oben, st. $\pi+\frac{1}{2}\varphi$, l. $\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\varphi$
—	—	8 v. oben, st. — — —, l. — — —
—	—	10 v. oben, st. — — —, l. — — —
135	—	10 v. unten, st. als, l. des.

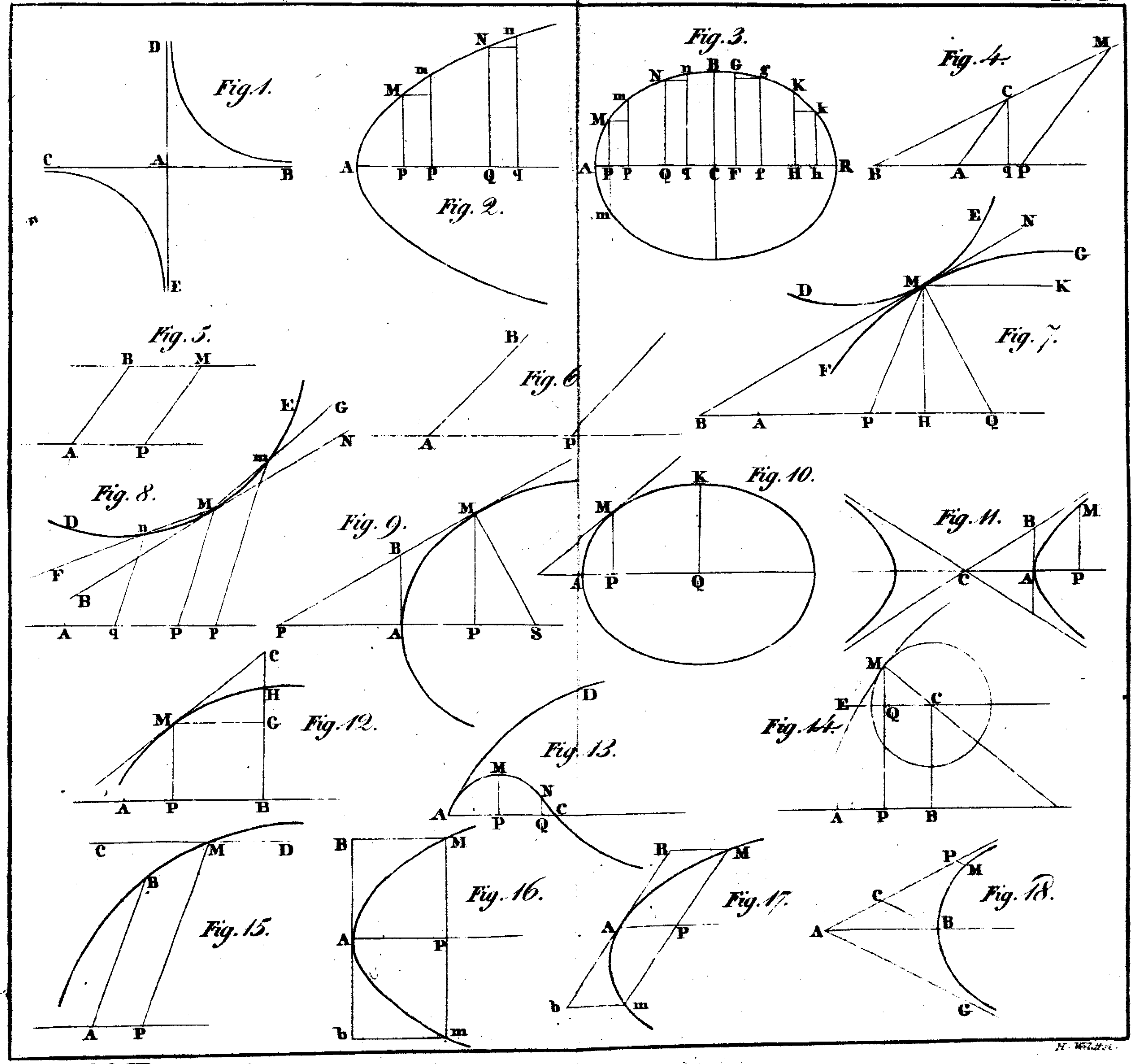

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.

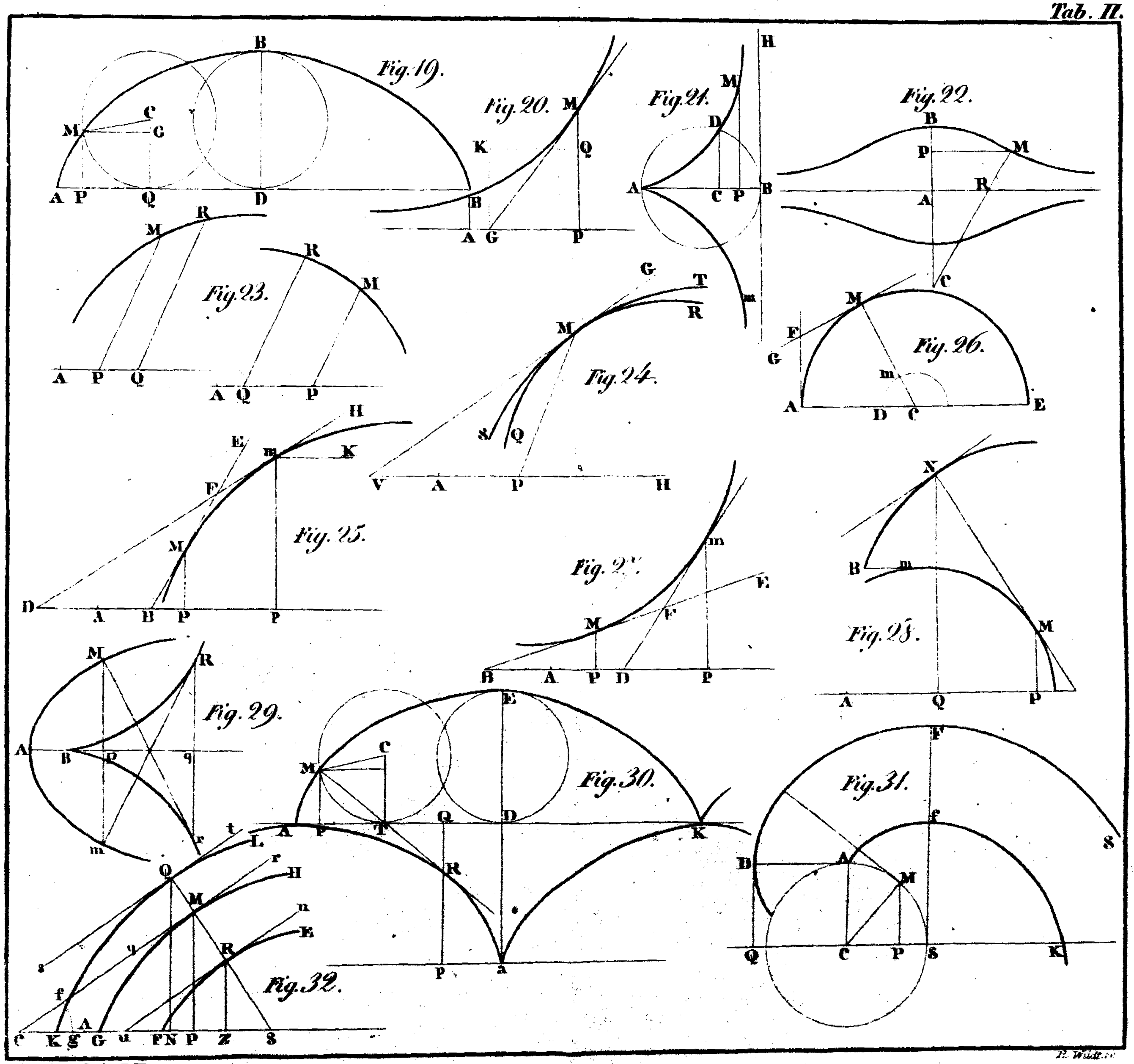
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.

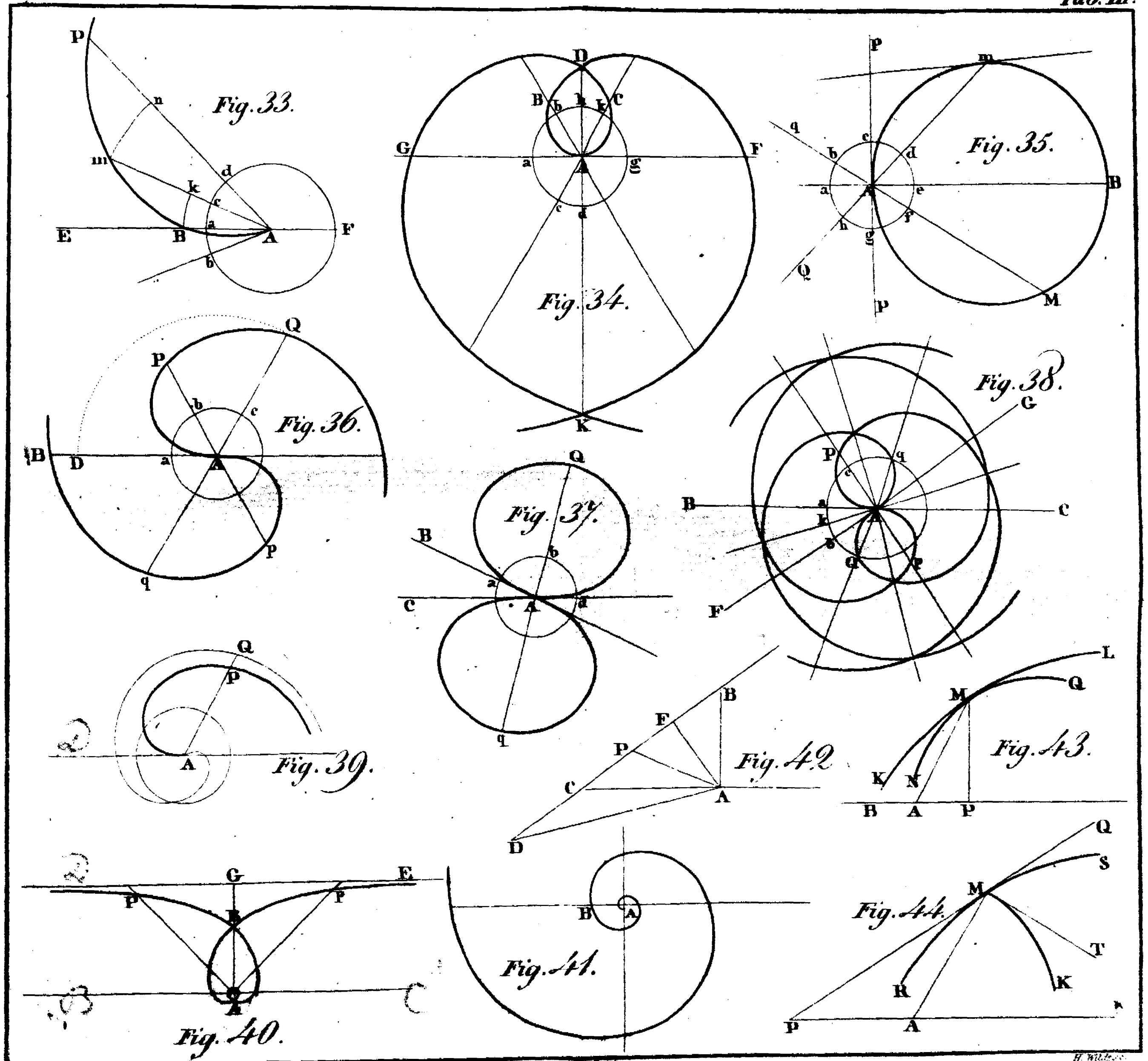

Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.

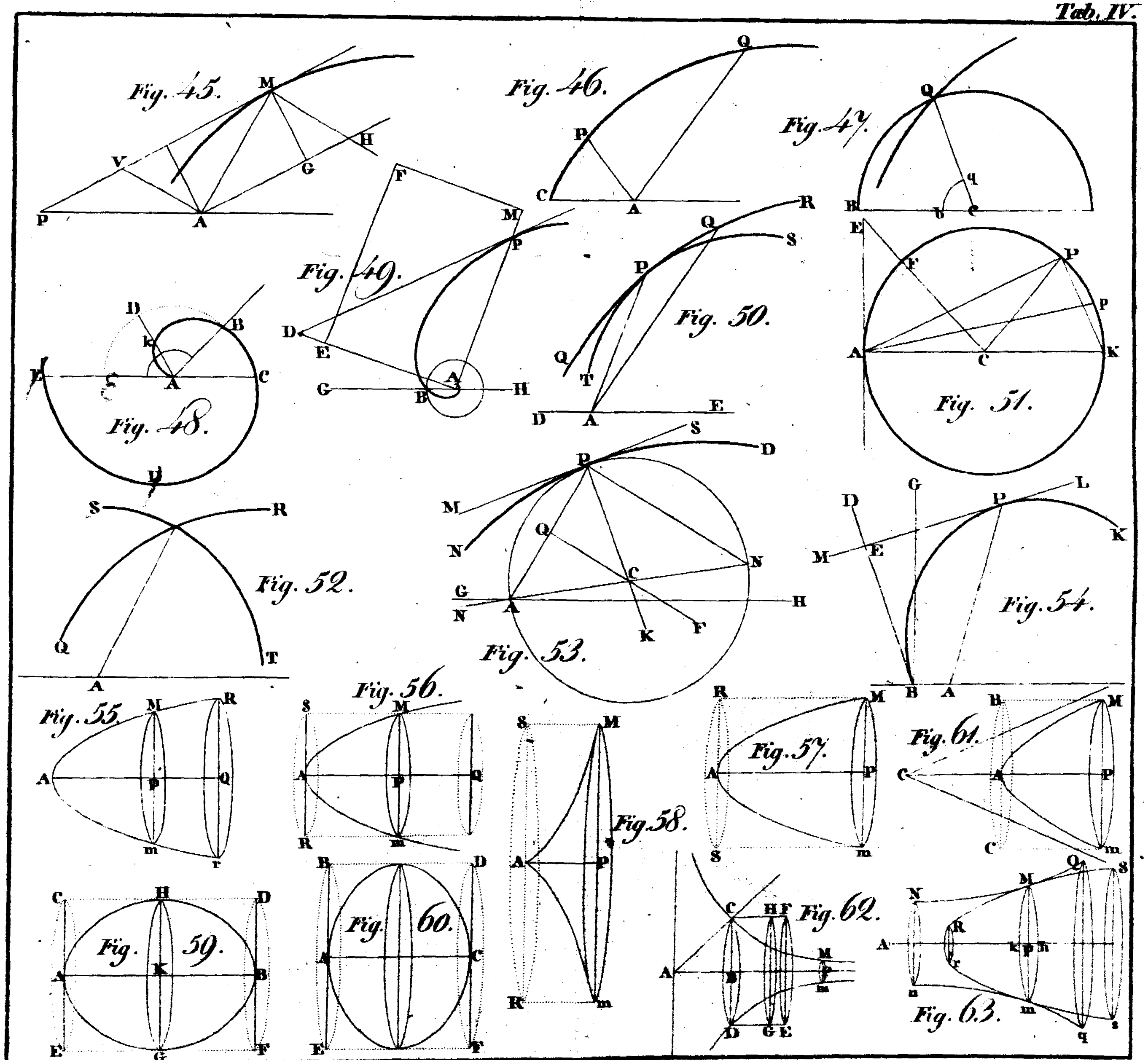
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.

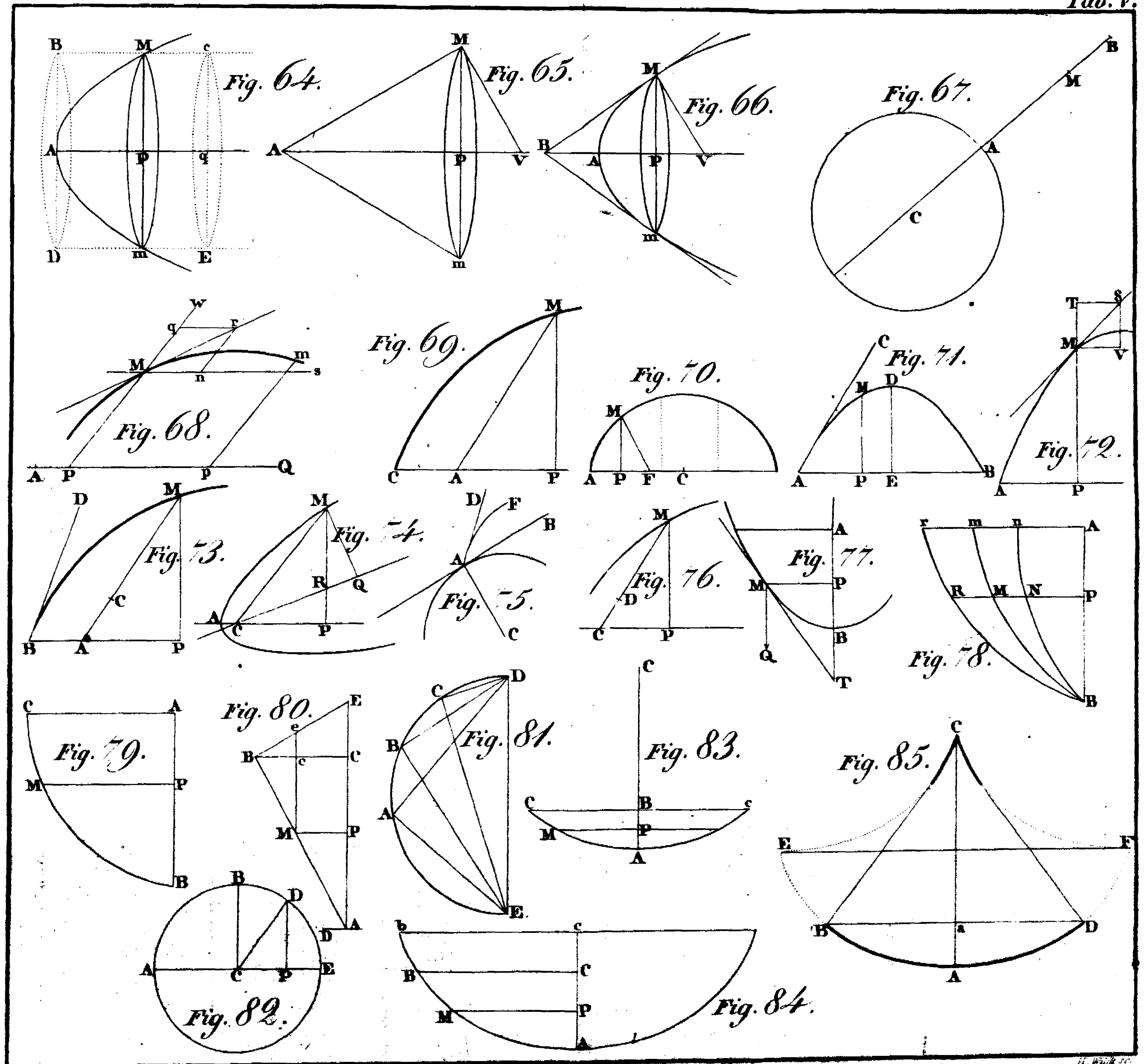
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.